Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932

I. Band / Bericht und Allgemeine Vorträge

Verhandlungen des Internationalen Mathematiker Kongresses Zürich 1932

I. Band

Bericht und Allgemeine Vorträge

Im Auftrage des Komitees für den Internationalen Mathematiker-Kongress Zürich 1932
herausgegeben von

Dr. Walter Saxer
Professor an der Eidg. Techn. Hochschule

ORELL FÜSSLI VERLAG ZÜRICH UND LEIPZIG

Inhaltsverzeichnis

Autorenverzeichnis

Autorenverzeichnis

Vorwort

Der 1. Band dieser Verhandlungen enthält den Kongressbericht und die allgemeinen Vorträge, der 2. Band die Auszüge der Sektionsvorträge. Auf Wunsch eines Referenten unterblieb die Drucklegung seines allgemeinen Vortrages; im 2. Band fehlen aus verschiedenen Gründen die Vortragsauszüge von acht Sektions-Mitteilungen. Die Anordnung der Vorträge entspricht in beiden Bänden im wesentlichen der chronologischen Reihenfolge, in welcher sie gehalten wurden. Im 1. Band konnten sämtliche erste Korrekturen von den Vortragenden selbst besorgt werden, mit Ausnahme derjenigen des Vortrages Alexander, die von Herrn Prof. *H. Hopf* in Zürich gelesen wurden. Ebenso waren die Korrekturen des 2. Bandes fast alle den entsprechenden Sektions-Referenten vorgelegt worden.

Für rasche Erledigung der Korrekturen bin ich allen Vortragenden zu grossem Dank verpflichtet. Der Präsident des Kongresses, Herr Prof. *Fueter*, sowie der Sekretär, Herr Prof. *Speiser*, sind mir bei der Redaktion und Drucklegung des Kongressberichtes in verschiedener Hinsicht behilflich gewesen. Ebenso muss ich die Mitarbeit meiner Assistenten der Herren *A. Hess*, *A. Pfluger* und *E. Stiefel* bei den Korrekturen erwähnen. Schliesslich sei auch der beste Dank an den *Orell Füssli* Verlag in Zürich ausgesprochen, der diese Verhandlungen innert kürzester Frist in mustergültiger Form herausbrachte.

Zürich, Ende Dezember 1932.

Walter Saxer

Vorbereitungen des Kongresses

Der internationale Mathematiker-Kongress zu Bologna 1928 beschloss in der Schlussitzung, die am 10. September im Palazzo Vecchio zu Florenz abgehalten wurde, dass der nächste internationale Mathematiker-Kongress in Zürich stattfinden solle. Im Namen der schweizerischen Delegation erklärte Herr Professor Fueter die Annahme dieses Beschlusses und lud die Mathematiker für das Jahr 1932 nach Zürich ein.

Die Vorbereitungen des Kongresses wurden rechtzeitig an die Hand genommen.

Die konstituierende Sitzung des Zürcher Komitees für den internationalen Mathematiker-Kongress fand am 11. Februar 1930 statt. Anwesend waren bei dieser Sitzung die Zürcher Mathematiker.

Es wurde ein provisorisches Exekutiv-Komitee mit Herrn Prof. Fueter als Präsident gewählt. Diese Wahl wurde von der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft bestätigt. Im Einverständnis mit letzterer wurde hierauf das Organisationskomitee durch Heranziehung von Mathematikern aus der ganzen Schweiz ergänzt. Das Organisationskomitee konstituierte sich am 24. Mai 1930 und traf die ersten Dispositionen zur Durchführung des Kongresses. Insbesondere wurde der Umfang der Kongressakten bestimmt.

In einer zweiten Sitzung vom 4. Juli 1931 wurde die Finanzierung und Organisation des Kongresses festgelegt. Herr Dr. Jöhr, Generaldirektor der Schweizerischen Kreditanstalt, hatte die grosse Freundlichkeit, die Geldsammlung zugunsten des Kongresses durchzuführen. Die Donatorenliste ist die folgende:

	Fr.
Eidgenössisches Departement des Innern, Bern	10,000.—
Kanton Zürich	10,000.—
Stadt Zürich	10,000.—
Allgemeine Maggi-Gesellschaft, Kempttal	5,000.—
Schweizerische Kreditanstalt, Zürich	5,000.—
Schweizerischer Bankverein, Zürich	5,000.—
Verein Schweizerischer Maschinenindustrieller, Zürich	5,000.—
Eidgenössische Bank A.-G., Zürich	2,000.—
Schweizerische Lebensversicherungs- und Rentenanstalt, Zürich	2,000.—
Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft, Zürich	2,000.—
Schweizerische Unfallversicherungsgesellschaft in Winterthur	2,000.—
„Vita“ Lebensversicherungs-A.-G., Zürich	2,000.—
„Zürich“ Allgemeine Unfall- und Haftpflicht-Versicherungs-A.-G., Zürich	2,000.—
Schweizerische Bankgesellschaft, Zürich	1,000.—

Vorbereitungen des Kongresses

	Fr.
Zürcher Kantonalbank, Zürich	1,000.—
A.-G. Leu & Co., Zürich	500.—
Bank für elektrische Unternehmungen, Zürich	500.—
Brauerei A. Hürlimann A.-G., Zürich	500.—
Basler Handelsbank, Zürich	500.—
Chemische Fabrik vormals Sandoz, Basel	500.—
„La Genevoise" Compagnie d'assurance sur la vie, Genf	500.—
„La Suisse" Société d'assurance sur la vie et contre les accidents, Lausanne	500.—
Schweizerische Volksbank, Zürich	500.—
	68,000.—

Geschenke von verschiedenen Zürcher Musikfreunden zugunsten des Konzertes Fr. 1898.50.

In der gleichen Sitzung wurde das wissenschaftliche und gesellschaftliche Programm festgelegt. Gleichzeitig wurde der Wortlaut und die Versendung des ersten Einladungs-Zirkulars beschlossen. Dasselbe gelangte im November 1931 zur Versendung, und zwar an alle Akademien, Hochschulen, mathematische Gesellschaften und Mathematiker der Welt.

Das definitive Programm des Kongresses wurde im März 1932 verschickt und enthielt die endgültigen Angaben über die getroffenen Wahlen und die vorgesehenen Redner. Das während des Kongresses durchgeführte Programm stimmte mit demselben überein, abgesehen von dem Umstande, dass Herr Prof. *Hardy* (Cambridge) den angezeigten Vortrag: „Recent work in additive theory of numbers" nicht halten konnte.

Ehren-Präsident:

Dr. *G. Motta*, Bundespräsident der Schweizerischen Eidgenossenschaft.

Ehren-Komitee:

Bundesrat Dr. *A. Meyer*, Vorsteher des Eidgenössischen Departements des Innern.
Regierungsrat Dr. *A. Streuli*, Präsident des Regierungsrates des Kantons Zürich.
Regierungsrat Dr. *O. Wettstein*, Erziehungsdirektor des Kantons Zürich.
Dr. *E. Klöti*, Stadtpräsident von Zürich.
Dr. *R. Haab*, Alt-Bundesrat.
Prof. Dr. *A. Rohn*, Präsident des Schweizerischen Schulrates.
Prof. Dr. *E. Rübel*, Präsident des Zentralvorstandes der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft.

Prof. Dr. *M. Plancherel*, Rektor der Eidgenössischen Technischen Hochschule.
Prof. Dr. *F. Fleiner*, Rektor der Universität Zürich.
Dr. *H. Stoll*, Präsident des Verwaltungsrates der Schweizerischen Kreditanstalt.
John Syz, Präsident des Vorortes des Schweizerischen Handels- und Industrievereins.
Aug. L. Tobler, Vizepräsident der Zürcher Handelskammer.
Nationalrat Dr. *C. Sulzer*, Präsident des Vereins Schweizerischer Maschinenindustrieller.
Dr. *G. Schaertlin*, Präsident des Verbandes konzessionierter Schweizerischer Versicherungsgesellschaften.
Dr. *H. Mousson*, Alt-Regierungsrat.
Prof. Dr. *C. F. Geiser*, Präsident des I. Internationalen Mathematikerkongresses in Zürich.

Organisations-Komitee:

Prof. Dr. R. Fueter, Zürich, Präsident; Prof. Dr. H. Fehr, Genf, Vizepräsident; Prof. Dr. M. Plancherel, Zürich, Vizepräsident; Prof. Dr. F. Gonseth, Zürich, Sekretär; Prof. Dr. A. Speiser, Zürich, Sekretär; Prof. Dr. S. Bays, Freiburg; Prof. Dr. F. Baeschlin, Zürich; Rektor Dr. P. Buchner, Basel; Prof. Dr. L. Crelier, Bern; Prof. Dr. G. Dumas, Lausanne; Prof. Dr. S. Dumas, Bern; Prof. Dr. L. G. Du Pasquier, Neuenburg; Prof. Dr. P. Finsler, Zürich; Prof. Dr. J. Franel, Zürich; P.-D. Dr. M. Gut, Zürich; Prof. Dr. A. Hirsch, Zürich; Prof. Dr. H. Hopf, Zürich; Prof. Dr. G. Juvet, Lausanne; Prof. Dr. A. Kienast, Küsnacht; Prof. Dr. L. Kollros, Zürich; Prof. Dr. E. Marchand, Zürich; Prof. Dr. E. Meissner, Zürich; Prof. Dr. C. Moser, Bern; Prof. Dr. A. Ostrowski, Basel; Prof. Dr. G. Pólya, Zürich; Prof. Dr. W. Saxer, Zürich; Prof. Dr. R. Wavre, Genf.

Exekutiv-Komitee:

Vorstand:

Prof. Dr. R. Fueter, Präsident;
Prof. Dr. M. Plancherel, Vizepräsident;
Prof. Dr. F. Gonseth, Sekretär;
Prof. Dr. A. Speiser, Sekretär;
Prof. Dr. H. Hopf.

Komitee für die Hauptvorträge:

Prof. Dr. M. Plancherel; Prof. Dr. A. Speiser.

Vorbereitungen des Kongresses

Komitee für die Sektionsvorträge:

Prof. Dr. F. Gonseth; Prof. Dr. H. Hopf.

Informations- und Presse-Komitee:

Priv.-Doz. Dr. M. Gut; Prof. Dr. E. Marchand;
A. W. Glogg, Redaktor an der Neuen Zürcher Zeitung.

Finanz-Komitee:

Dr. A. Jöhr, Generaldirektor der Schweizerischen Kreditanstalt, Präsident;
K. Türler, Direktor des Schweizerischen Bankvereins;
Ing. Cattani, Sekretär des Vereins Schweizerischer Maschinenindustrieller.

Wohnungs-Komitee:

H. Besimo, Sekretär des Zürcher Hoteliervereins; Prof. Dr. L. Kollros.
Mitarbeiter des Wohnungs-Komitees: Dr. H. Grossmann; Dr. E. Völlm.

Vergnügungs-Komitee:

Direktor Heinrich Hürlimann; Prof. Dr. A. Kienast.

Drucklegungs-Komitee:

Prof. Dr. W. Saxer.

Ausstellung mathematischer Bücher und Instrumente:

Dr. J. J. Burckhardt.

Damen-Komitee:

Frau E. Speiser, Präsidentin; Frau Bäschlin, Frau Falkeisen-Escher, Frau Fueter, Frau Gonseth, Frau Hopf, Frau Jöhr, Frau Kollros, Frau Kienast, Frau Marchand, Frau Plancherel, Frau Pólya, Fräulein Dr. M. L. Sarasin, Frau Saxer, Frau v. Wyss.

Verlauf des Kongresses

Programm

Der Ablauf des Kongresses erfolgte gemäss folgendem Programm:

Sonntag, den 4. September

20 Uhr: Empfang der Kongressteilnehmer im Studentenheim, Clausiusstr. 21.

Montag, den 5. September

9 Uhr: Eröffnungssitzung im Auditorium maximum der Eidg. Technischen Hochschule.
Begrüssung des Kongresses durch das Organisationskomitee und die Behörden des Kantons Zürich.
Konstituierung des Kongresses[1]).

11—12 Uhr: Vortrag, *R. Fueter*, Idealtheorie und Funktionentheorie.

15—18 Uhr: Sektionsvorträge[2]).

20 Uhr: Festkonzert zu Ehren des Internationalen Mathematikerkongresses in der Tonhalle Zürich.
Leitung: *Dr. Volkmar Andreae.* Solisten: *Clara Wirz-Wyss* (Sopran), *Ernest Bauer* (Tenor), *Felix Loeffel* (Bass). Orchester: Das Konzertorchester der Tonhallegesellschaft.

Konzertprogramm:

1. *Othmar Schoeck:* „Vom Fischer un syner Fru", Oper in einem Aufzuge (Konzertaufführung).
2. *Arthur Honegger:* a) „Pastorale d'été" für Orchester allein; b) „Pacific", für Orchester allein.
3. *Ludwig van Beethoven:* Sinfonie Nr. 3 in Es-Dur (Eroica). Allegro con brio – Marcia funebre – Scherzo – Finale.

Dienstag, den 6. September

9—10 Uhr: Vortrag, *C. Carathéodory*, Über die analytischen Abbildungen durch Funktionen mehrerer Veränderlicher.

10—11 Uhr: Vorträge, *G. Julia*, Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes.
W. Pauli[3]), Mathematische Methoden der Quantenmechanik.

[1]) Siehe Protokoll dieser Sitzung S. 38—43.

[2]) Sämtliche allgemeinen Vorträge fanden in Auditorien der Eidg. Technischen Hochschule, alle Sektionssitzungen in Auditorien der Universität statt.

[3]) Auf Wunsch des Referenten unterblieb eine Veröffentlichung seines Vortrages in diesen Verhandlungen.

Verlauf des Kongresses

11—12 Uhr:	Vorträge, *N. Tschebotaröw*, Die Aufgaben der modernen Galoisschen Theorie.
	T. Carleman, Sur la théorie des équations intégrales linéaires et ses applications.
14 Uhr:	Seefahrt nach Ufenau und Au bei prachtvollem Wetter, Rückkehr 20 Uhr.
	247 offizielle Delegierte und ihre Damen wurden von Herrn und Frau v. Schulthess-Bodmer auf dem Schlossgut Au empfangen; sie erhielten hierzu eine persönliche Einladung.
	Den übrigen 420 Teilnehmern wurde ein Tee in Rapperswil serviert.

Mittwoch, den 7. September

9—10 Uhr:	Vortrag, *E. Cartan*, Sur les espaces riemanniens symétriques.
10—11 Uhr:	Vorträge, *L. Bieberbach*, Operationsbereiche von Funktionen.
	M. Morse, The calculus of variations in the large.
11—12 Uhr:	Vorträge, *E. Noether*, Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie.
	H. Bohr, Fastperiodische Funktionen einer komplexen Veränderlichen.
14 Uhr 30:	Es wurde eine photographische Gesamt-Aufnahme der Kongress-Teilnehmer beim Eingang der Universität gemacht.
15—18 Uhr:	Sektionsvorträge.

Donnerstag, den 8. September

Es fanden 4 *Exkursionen* statt, die alle einen prachtvollen Verlauf nahmen.

1. Klausenpass:	Zürich ab in Gesellschaftswagen: 8 Uhr, Rückkehr 19.30 Uhr. 152 Teilnehmer.
2. Rigi:	Zürich ab 7 Uhr, Rückkehr 19.50 Uhr. 89 Teilnehmer.
3. Pilatus:	Zürich ab 7 Uhr, Rückkehr 19.50 Uhr. 59 Teilnehmer.
4. Vierwaldstättersee:	Zürich ab 10 Uhr, Rückkehr 19.50 Uhr. 82 Teilnehmer.

Freitag, den 9. September

9—10 Uhr:	Vortrag, *F. Severi*, La théorie générale des fonctions analytiques de plusieurs variables et la géométrie algébrique.
10—11 Uhr:	Vorträge, *R. Nevanlinna*, Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion.
	R. Wavre, L'aspect analytique du problème des figures planétaires.

11—12 Uhr: Vorträge, *J. W. Alexander*, Some problems in topology.
F. Riesz, Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle.
15—18 Uhr: Sektionsvorträge.

Samstag, den 10. September

10—11 Uhr: Vorträge, *G. Valiron*, Le théorème de Borel-Julia dans la théorie des fonctions méromorphes.
W. Sierpiński, Sur les ensembles de points qu'on sait définir effectivement.
11—12 Uhr: Vorträge, *S. Bernstein*, Sur les liaisons entre quantités aléatoires[4]).
K. Menger, Neuere Methoden und Probleme der Geometrie.
15—18 Uhr: Sektionsvorträge.
19 Uhr: Offizieller Festakt im Stadttheater Zürich.
Begrüssung des Kongresses durch den Bundesrat der Schweizerischen Eidgenossenschaft[5]).
Nachher Buffet mit Unterhaltungsprogramm. Tanz.

Sonntag, den 11. September

16 Uhr: Tee im Grand Hôtel Dolder.
Offizielle Begrüssung des Kongresses durch die Behörden der Stadt Zürich[6]).

Montag, den 12. September

10—11 Uhr: Vortrag, *J. Stenzel*, Anschauung und Denken in der klassischen Theorie der griechischen Mathematik.
11—12 Uhr: Schlussitzung des Kongresses[7]).

Nach dem Kongress wurde von 57 Teilnehmern eine Exkursion zur Besichtigung der einzigartig gelegenen wissenschaftlichen Station auf dem Jungfraujoch durchgeführt. Abfahrt Zürich, Montag, den 12. September, 13 Uhr. Übernachten auf der Scheidegg. Dienstag, den 13. September, Fahrt auf das Jungfraujoch. Besichtigung der hochalpinen Forschungsstation. Vorträge der Herren *Dr. Chorus* und *Dr. Wyss* über deren Bedeutung. Abfahrt 13 Uhr 35, Ankunft in Zürich 24 Uhr. Die Exkursion erfreute sich herrlichsten Wetters.

[4]) Da Herr Prof. Bernstein am Kongress nicht teilnehmen konnte, wurde sein Vortrag von Herrn Prof. Hostinský, Brno verlesen.
[5]) Vergl. Reden S. 62—75.
[6]) Vergl. Reden S. 76—79.
[7]) Vergl. Protokoll dieser Sitzung, S. 58—61.

Verlauf des Kongresses

Sektionsvorträge[8]).

Es wurden folgende Sektionen gebildet:

I. Algebra und Zahlentheorie. II. Analysis (3 Untersektionen: IIa, IIb, IIc). III. Geometrie (2 Untersektionen: IIIa, IIIb). IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und Statistik. V. Mathematisch-technische Wissenschaften und Astronomie. VI. Mechanik und mathematische Physik (2 Untersektionen: VIa, VIb). VII. Philosophie und Geschichte. VIII. Pädagogik.

Die Dauer eines Sektionsvortrages wurde im allgemeinen auf 15 Minuten beschränkt.

Die *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* hat während des Kongresses in Zürich getagt. Ihre Verhandlungen fanden in der Sektion VIII statt.

Für die *Damen* wurde das folgende spezielle Programm abgewickelt:

Montag,	5. September,	16 Uhr: Tee im Lyceumklub, Rämistrasse 26.
Dienstag,	6. September,	10—12 Uhr: Besuch des Schweizerischen Landesmuseums, mit Führung.
Mittwoch,	7. September,	10—12 Uhr: Verschiedene Führungen in der Stadt Zürich. 15 Uhr: Fahrt mit der Forchbahn (von Stadelhoferbahnhof) nach Zumikon, Tee im Golfklubhaus.
Freitag,	9. September,	14 Uhr: Ausflug im Autocar nach Schloss Wildegg.
Samstag,	10. September,	10—12 Uhr: Besuch des Kunsthauses, Heimplatz, mit Führung.

Der *Lyceumklub* stand während der Dauer des Kongresses den Damen des Kongresses den ganzen Tag zur Verfügung.

Ausstellung mathematischer Bücher und Instrumente.

In der Eidg. Technischen Hochschule fand während der ganzen Dauer des Kongresses eine Ausstellung mathematischer Bücher statt, organisiert von Herrn *Dr. J. J. Burckhardt.* Dieselbe gab einen Überblick über die gesamte heutige mathematische Weltliteratur. Es wurden dort auch Bücher verkauft oder Bestellungen von Büchern angenommen.

Ausserdem wurde gleichzeitig eine Ausstellung *schweizerischer* mathematischer Instrumente durchgeführt.

[8]) Siehe die speziellen Sitzungsprotokolle, S. 44—57.

Delegiertenliste

Ägypten.

Ägyptische Regierung:
Prof. A. M. Mosharrafa, Universität, Guizeh.
Prof. Moustafa Ahmed Abu Zahra, Technische Hochschule, Guizeh.

Ägyptische technische Hochschule:
Prof. Moustafa Ahmed Abu Zahra, Guizeh.

Ägyptische Universität:
Prof. A. M. Mosharrafa, Guizeh.
M. Winn, Maître de Conférences de Math. Pures, Guizeh.

Institut d'Egypte:
M. Farid Boulad bey, Membre de l'Institut d'Egypte, Kairo.

Süd-Afrika.

Rhodes University College, Grahamstown:
Mr. G. G. Wiles, Balliol College, Oxford, England.

University of Cape Town:
Mr. Stanley Skewes, Kings College, Cambridge.

Vereinigte Staaten von Amerika (U. S. A.).

Government of the United States:
Prof. Oswald Veblen, Princeton University, Princeton, Chairman of Delegation.
Prof. James W. Alexander, Princeton University, Princeton.
Prof. H. F. Blichfeldt, Harvard University, Cambridge.
Prof. Oliver Dimon Kellogg, Harvard University, Cambridge.
Prof. Harold Marston Morse, Harvard University, Cambridge.
Prof. Marshall Harvey Stone, Yale University, New Haven.

American Academy of Arts and Sciences:
Prof. Harry W. Tyler (Chairman of Delegation), Washington-University.
Prof. G. D. Birkhoff, Harvard-University, Cambridge.
Prof. Marston Morse, Harvard-University, Cambridge.

American Association of University Women:
Dr. Marguerite Lehr, c/o Brown, Shipley & Co., London.

American Astronomical Society:
Prof. Max Wolf, Königstuhl-Sternwarte, Heidelberg.

American Mathematical Society:
Prof. E. Kasner, Columbia University, New York.
Prof. C. N. Moore, University of Cincinnati, Cincinnati, Ohio.
Prof. R. G. D. Richardson, Brown University, Providence, Rhode Island.
Prof. E. B. Stouffer, University of Kansas, Lawrence, Kansas.
Prof. J. D. Tamarkin, Brown University, Providence.

American Society of Civil Engineers, New York:
Prof. Karl E. Hilgard, Zürich.

Brown University, Providence, Rhode Island:
Dean R. G. D. Richardson.
Prof. R. C. Archibald.
Prof. J. D. Tamarkin.
Assoc. Prof. C. R. Adams.

Clark University, Worcester, Mass.:
Prof. Frank Blair Williams.

Columbia University, New York:
Prof. Edward Kasner.

Asst. Prof. O. Koopman.
Prof. David Eugene Smith.

Cornell University, Ithaca, N. Y.:
Prof. Wallie Abraham Hurwitz.
Prof. Virgil Snyder.

Dartmouth College, Hanover N. H.:
Prof. Louis L. Silverman, The Graduate Club, Hanover, New Hampsh. N. Y.

The Engineering Foundation:
Prof. Stephen Timoshenko, University of Michigan, Ann Arbor, Mich.
Mr. T. von Kármán, Director of Daniel Guggenheim Graduate School of Aeronautics, California Inst. of Technology, Pasadena, Calif.
Dr. Ing. A. Nadai, Mechanics Div., Research Laboratories, Westinghouse Electric and Manufacturing Comp., East Pittsburgh, Penns.

Harvard University, Cambridge, Mass.:
Prof. G. David Birkhoff.
Prof. Marston Morse.

Hunter College of the City of New-York, Park Avenue and 68th. Street, New-York:
Prof. Lao G. Simons, Head of the Department of Mathematics, New-York.
Miss Carolyn Eisele, New-York.
Dr. Laura Guggenbuhl, Instructor, New-York.

Indiana University:
Asst. Prof. Thomas W. Moore.

Iowa Academy of Science:
Professor J. S. Turner.

Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.:
Prof. Norbert Wiener.

The Mathematical Association of America, Oberlin, Ohio:
Prof. R. C. Archibald, Brown University, Providence.
Prof. W. D. Cairns, Oberlin College, Ohio.
Prof. Arnold Dresden, Swarhmore Coll., Swarthmore, Penns.
Prof. David Eugene Smith, Columbia University, New-York.
Prof. Warren Weaver, University of Wisconsin, Madison, Wisc.

The Michigan College of Mining & Technology, Houghton:
Prof. James Fisher.

The National Council of Teachers of Mathematics:
Prof. David Eugene Smith, Teachers Coll., Columbia University, New-York.

Oberlin College, Oberlin, Ohio:
Prof. William de Weese Cairns.

Oklahoma Academy of Science:
Dr. Carl Gunderson.
M. College, Stillwater.
Dr. N. A. Court.

Purdue University, La Fayette, Indiana:
Prof. Thomas E. Mason.

Union College, Schenectady, New-York:
Prof. David S. Morse, New-York.

University of Chicago:
Prof. Lloyd Lyne Dines, University of Saskatchewan, Saskatoon, Canada.

University of Cincinnati:
Prof. C. N. Moore.
Prof. I. A. Barnett.
Prof. Gaylord Merriman.

University of Kansas, Lawrence, Kansas:
Dean Ellis Bagley Stouffer.
Prof. Ulysses Grant Mitchell.

University of Michigan, Ann Arbor, Mich.:
Prof. Rajnich.
Prof. Rouse.

University of Minnesota:
Prof. Raymond W. Brink.

University of Missouri:
Prof. Wallie Abraham Hurwitz, Cornell University, Ithaca.

University of New-Hampshire, Durham N. H.:
Dean Hermon L. Slobin.

University of Wisconsin, Madison:
Prof. Warren Weaver, The Rockfeller Foundation, New-York.

Vassar College, Poughkeepsie, N. I.:
Prof. Louise Duffield Cummings.

Washington University, St. Louis, Mo.:
Prof. W. Henry Roever.

Wellesley College, Wellesley, Mass.:
Miss Marion E. Stark, Ph. D.

Wells College, Aurora-on-Cayuga, New-York:
Prof. Temple R. Hollcroft.

Western Reserve University, Cleveland, Ohio:
Prof. Webster G. Simon, London.

Williams College, Mass., Williamstown:
Harold Laird Dorwart.

Yale University, New Haven Connect.:
Prof. Oystein Ore.

Belgien.

Gouvernement Belge:
Prof. de Donder, Bruxelles, Membre de l'Académie Royale de Belgique.
Prof. A. Errera, Bruxelles, Membre de l'Académie Royale de Belgique.
Prof. Godeau, Liége, Membre de l'Académie Royale de Belgique.
Prof. Mineur, Bruxelles, Membre de l'Académie Royale de Belgique.
Prof. Simonart, Louvain, Membre de l'Académie Royale de Belgique.
Baron C. de la Vallée Poussin, Prof. à Louvain, Membre de l'Académie Royale de Belgique.

Académie Royale de Belgique, Bruxelles:
Prof. de Donder, Bruxelles.
Prof. Godeaux, Liége.
Prof. Mineur, Bruxelles.
Baron de la Vallée Poussin, Prof. à Louvin.

Institut des Hautes Etudes de Belgique, Bruxelles:
Prof. A. Errera, Uccle-Bruxelles.
Prof. M. Kraïtchik, Bruxelles.

Université Libre de Bruxelles:
Prof. Th. de Donder.
Prof. A. Errera.
Prof. A. Mineur.
M. Th. Lepage, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Bruxelles.

Université de Liége:
Prof. L. Godeaux.

Université de Louvain:
Prof. M. Simonart.
Baron de la Vallée Poussin, Professeur.

Bolivien.

Regierung von Bolivien:
General D. Alfredo Vasquez Cobo, Gesandter in Paris.

Bulgarien.

Bulgarische Regierung:
Prof. R. Popoff, Sofia.

Universität Sofia:
Prof. N. Obrechkoff.
Prof. R. Popoff.
Prof. L. Tschakaloff.

Canada.

The University of Toronto:
Prof. J. Chapelon.
Prof. A. F. C. Stevenson.
Prof. J. L. Synge.

China.

Chiao-Tung University, Shanghai:
Mr. Koh-Pao Hsu, Berlin-Charlottenburg.

Société Mathematico-Physique:
Prof. King-Lai Hiong.

Costa Rica.

Gouvernement de Costa Rica:
Prof. Henri Fehr, Genève.

Dänemark.

Dänische Regierung:
Prof. Harald Bohr, Universität Kopenhagen.

Technische Hochschule, Kopenhagen:
Prof. J. Mollerup.
Prof. J. Nielsen.

Universität Kopenhagen:
Prof. Harald Bohr.

Deutschland.

Deutsche Regierung:
Dr. Lietzmann, Oberstudienrat, Göttingen.

Albert-Ludwigs Universität, Freiburg im Breisgau:
Prof. Gustav Doetsch, Freiburg i. B.
Prof. Alfred Loewy, Freiburg i. B.

Bayerische Akademie der Wissenschaften:
Prof. von Dyck, München.
Prof. Perron, München.
Prof. Pringsheim, München.

Bergakademie Freiberg:
Prof. Willers, Freiberg.

Berliner Mathematische Gesellschaft:
Prof. Salkowski, Berlin-Charlottenburg.

Deutsche Mathematikervereinigung:
Prof. H. Weyl, Göttingen.
Prof. L. Bieberbach, Berlin-Dahlem.
Prof. O. Blumenthal, Aachen.
Prof. H. Hasse, Marburg (Lahn).

Deutscher Verein zur Förderung des mathemathischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts, Dresden:
Prof. Lorey, Leipzig.

Deutscher Verein für Versicherungswissenschaft:
Prof. Alfred Manes, Berlin.
Prof. von Mises, Berlin.

Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg:
Prof. Heinrich Brandt, Halle a. S.

Georg August Universität, Göttingen:
Prof. Courant, Göttingen.

Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin:
Prof. von Mises, Berlin.

Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen:
Prof. E. Landau, Göttingen.

Gewerbeschule Köthen:
Prof. Harry Schmidt, Köthen u. Leipzig.

Heidelberger Akademie der Wissenschaften:
Prof. Liebmann, Heidelberg.
Prof. Rosenthal, Heidelberg.

Institut für Versicherungswissenschaft a. d. Universität Leipzig:
Prof. W. Lorey, Leipzig.

Kaiserl. Leopold. Carolin. Deutsche Akademie der Naturforscher, Halle a. S.:
Prof. Heinrich Brandt, Halle a. S.

Landes-Universität Giessen:
Prof. Dr. Hans Mohrmann, Giessen.

Ludwig Maximilians Universität, München:
Prof. O. Perron, München.

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg:
Prof. Wilhelm Blaschke, Hamburg.

Philipps-Universität, Marburg/Lahn:
Prof. Hasse, Marburg (Lahn).
Prof. Hensel, Marburg (Lahn).
Pr.-Doz. Ullrich, Marburg (Lahn).

Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin:
Prof. Ludwig Bieberbach, Berlin-Dahlem.

Sächsiche Akademie der Wissenschaften:
Prof. Paul Koebe, Leipzig.

Technische Hochschule, Berlin:
Prof. Salkowski, Berlin.

Technische Hochschule Danzig:
Prof. Pohlhausen, Techn. Hochschule, Danzig.

Technische Hochschule, Hannover:
Prof. Conrad Müller.

Technische Hochschule, Karlsruhe:
Prof. Theodor Pöschl, Karlsruhe.

Universität Erlangen:
Prof. Otto Haupt, Erlangen.
Prof. Wolfgang Krull, Erlangen.

Universität Heidelberg:
Prof. Liebmann, Heidelberg.
Prof. Rosenthal, Heidelberg.

Universität Kiel:
Prof. Adolf Fraenkel, Kiel.

Universität Köln a/Rh.:
Prof. Hans Hamburger, Köln.

Universität Leipzig:
Prof. Paul Koebe, Leipzig.

Universität Tübingen:
Prof. Konrad Knopp, Tübingen.
Prof. Karl Kommerell, Tübingen.
Prof. Alfred Pringsheim, München.

Universität Würzburg:
Prof. Otto Volk, Würzburg.

Verein Deutscher Ingenieure, Berlin:
Prof. von Mises, Berlin.

Westf. Wilhelms-Universität, Münster, Westf.:
Prof. Heinrich Behnke, Münster, Westf.

Württ. Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften:
Prof. Karl Kommerell, Tübingen.
Prof. Frank Loebell, Stuttgart-Cannstatt.

England.

The British Government:
Prof. Forsyth, London.

Bedford College for Women, London:
Dr. H. B. Heywood, Middlesex.

British Association for the Advancement of Science:
Prof. G. H. Hardy, Trinity College, Cambridge.

British Federation of University Women:
Dr. Dorothy Maude Wrinch, Lady Margaret Hall, Oxford.

Cambridge Philosophical Society:
F. P. White, St. Johns College, Cambridge.

Cambridge University:
Prof. G. H. Hardy.

Edinburgh Mathematical Society:
H. C. Ruse, Edinburgh.
Dr. G. Timms, St. Andrews.

Girton College, Cambridge:
Miss Dr. M. L. Cartwright.
Miss Dr. R. C. H. Young.

Goldsmiths' College of the University of London:
Dr. H. E. J. Curzon.

Internat. Federation of University Women, London:
Dr. Dorothy Wrinch, Oxford.

Kings College, London:
J. T. Combridge, Redhill.

The London Mathematical Society:
Prof. A. C. Dixon, Middlesex.
Prof. G. N. Watson, Birmingham.

The Mathematical Association:
Prof. E. H. Neville, Reading.
Prof. G. N. Watson, Birmingham.

Newnham College, Cambridge:
Margaret D. Kennedy.

The Royal Institution:
Prof. Paul Scherrer, Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

The Royal Society:
Prof. A. R. Forsyth, London.

The Royal Society of Edinburgh:
Prof. J. E. A. Steggall, Dundee.
Prof. H. W. Turnbull, St. Andrews.
Prof. E. T. Whittaker, Edinburgh.

Society of Oxford Home-Students, Oxford:
Dr. Dorothy Wrinch, Lady Margaret Hall, Oxford.

The University of Birmingham:
Prof. G. N. Watson, Birmingham.

The University of Bristol:
Prof. G. N. Watson, Birmingham.

University College, Dundee:
Prof. J. E. A. Steggall.

University of Durham:
Mr. J. L. Burchnall.

University of Edinburgh:
Prof. E. T. Whittaker.

University of Glasgow:
Prof. James Gordon Gray.

University of Liverpool:
Prof. W. H. Young, Lausanne.

University of London Institute of Education, London:
Sir Percy Nunn.

The University of Manchester:
Prof. Louis Joel Mordell.

The University of Oxford:
Prof. E. A. Milne.

The University Reading:
Prof. E. H. Neville.

University of Sheffield:
Prof. P. J. Daniell.

The University of St. Andrews:
Prof. J. E. A. Steggall, Dundee.
Prof. H. W. Turnbull, St. Andrews.

Westfield College, London:
Miss G. K. Stanley, Westfield College, London.

Finnland.

Akademie d'Abo:
Doz. Lars Valerian Ahlfors, Universität Abo.

Societas Scientiarum Fennica:
Prof. Rolf Nevanlinna, Universität Helsingfors.

Frankreich.

Gouvernement de la République Française:
M. Elie Cartan, Membre de l'Institut, Paris.
M. G. Julia, Professeur à la Sorbonne, Paris.
M. Leroux, Professeur à la Sorbonne, Paris.
M. Risser, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Paris.

Académie des Sciences, Lettres et Arts de Clermont-Ferrand:
M. Dive, Professeur, Clermond-Ferrand.

Association Française pour l'avancement des Sciences, 28, Rue Serpente, Paris:
M. Elie Cartan, Membre de l'Institut, Paris.

Collège de France:
M. Jacques Hadamard, Membre de l'Institut, Paris.

Ecole d'Application du Génie Maritime:
M. l'Ingénieur Général Barrillon, Paris.

Ecole Centrale des Arts et Manufactures, Paris:
M. J. Hadamard, Membre de l'Institut, Paris.

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris:
M. Plâtrier, Professeur, Paris.

Ecole Nationale Supérieure des Mines:
M. Paul Lévy, Professeur, Paris.

Ecole Polytechnique de Paris:
M. Jacques Hadamard, Membre de l'Institut, Paris.
M. G. Julia, Professeur à la Sorbonne, Paris.
M. Paul Lévy, Professeur à l'Ecole Polytechnique, Paris.

Ecole Supérieure d'Eléctricité, Malakoff (Seine):
M. J. B. Pomey, Paris.
M. Maurice Janet, Professeur à l'Université de Caen.

Faculté Catholique de Lyon, Lyon:
M. Chapas, Professeur.

Groupe académique Russe, Paris:
M. Basil Demtchenko, Viroflay (S. et O.).
M. Dimitri Riabouchinsky, Paris.
M. Serge Savitch, Professeur, Paris.

Institut de France:
M. Elie Cartan, Membre de l'Institut, Paris.

Institut International de Coopération Intellectuelle, Paris:
M. le Dr. A. Establier.

Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg:
M. Thiry, Directeur de l'Institut de Mathématiques de l'Université Strasbourg.
M. Cerf, Professeur à la Faculté des Sciences, Strasbourg.

Institut Supérieur Technique Russe en France, Paris:
M. Dimitri Riabouchinski, Professeur, Paris.
M. Serge Savitch, Professeur, Paris.

Maison de l'Institut de France, Londres:
M. le Comte Jean de Morant, Ingenieur E. S. E., Amiens, France.

Société Française des Electriciens, Paris:
M. Darrieus, Houilles (Seine et Oise).
M. J. B. Pomey, Paris.

Société des Ingénieurs Civils de France, Paris:
M. Darrieus, Houilles (Seine et Oise).

Société Mathématique de France:
M. Julia, Président de la Société Mathématique de France, Paris.

M. Valiron, Secrétaire de la Société Mathématique de France, Paris.

Société des Sciences de Lille:
M. Albert Chatelet, Recteur de l'Académie de Lille.

Société Scientifique Flammarion, Marseille:
M. Fernand Louvet, Marseille.

Université d'Aix-Marseille:
M. Emile Traynard, Professeur, Marseille.

Université d'Algers:
M. Carrus, Professeur, Algers.

Université de Caen:
M. Maurice Janet, Professeur, Caen.
M. L. Zoretti, Professeur, Caen.

Université de Clermont:
M. Dive, Professeur, Clermond.
M. Mandelbrojt, Professeur, Clermond.

Université de Lille:
M. Paul Dubreil, Professeur, Lille.
M. J. Kampé de Fériet, Professeur, Lille.

Université de Nancy:
M. le Doyen Leau, Professeur, Nancy.
M. Darmois, Professeur, Nancy.
M. Husson, Professeur, Nancy.
M. Mentré, Professeur, Nancy.

Université des Paris:
M. Borel, Professeur, Paris.
M. E. Cartan, Professeur, Paris.
M. Drach, Professeur, Paris.
M. Julia, Professeur, Paris.
M. Pérès, Professeur, Paris.
M. Riabouchinsky, Professeur, Paris.
M. Valiron, Professeur, Paris.

Université de Poitiers:
M. Bouligand, Professeur, Poitiers.

Université de Toulouse:
M. Buhl, Professeur, Toulouse.

Griechenland.

Société Mathématique de Grèce:
Prof. Kaissar, Athènes.
Prof. Keramidas, Athènes.
Prof. Sakellariou, Athènes.

Société Philosophique de Grèce:
Prof. Papaïoannou, Athènes.

Université d'Athènes:
Prof. Hadzidakis, Président de la délégation.
Prof. Papaïoannou, Athènes.
Prof. Sakellariou, Athènes.
Prof. Zervos, Athènes.

Université de Thessalonique:
Prof. Carathéodory, Munich.

Holland.

Holländische Regierung:
Prof. E. L. J. Brouwer, Amsterdam.
Prof. J. G. van der Corput, Groningen.
Prof. R. W. Weitzenboeck, Amsterdam.

Holländische Akademie der Wissenschaften:
Prof. J. G. van der Corput, Groningen.

Königl. Institut der Ingenieure, 's Gravenhage:
Prof. Ir. C. B. Biezeno, Delft.

Technische Hochschule Delft:
Prof. H. Bremekamp.
Prof. J. A. Schouten.

Universität Groningen:
Prof. J. G. van der Corput.
Prof. Gerrit Schaake.

Universität Leiden:
Prof. J. Droste.

Japan.

Japanische Regierung:
Dr. Teiji Takagi, Professor of Mathematics at Tokyo Imperial University, Tokyo.

Imperial Academy of Japan:
Prof. Teiji Takagi.

National Research Council of Japan:
Prof. Teiji Takagi.

Physico-Mathematical Society of Japan:
Prof. Teiji Takagi.

Tokyo Imperial University:
Prof. Teiji Takagi.

Indien.

Agra College, Agra:
Prof. Shyama Charan, London, England.

University of Bombay:
Prof. John Maclean, Wilson College, Bombay.

Irland.

Government of the Irish Free State:
Prof. A. W. Conway, Dublin.

The National University of Ireland:
Prof. A. W. Conway, Dublin.

The Queen's University of Belfast:
Prof. J. G. Semple.

Royal Dublin Society:
Prof. A. W. Conway.

The Royal Irish Academy:
Prof. A. J. McConnell.

Trinity College, Dublin:
Prof. Ch. H. Rowe, Dublin.

University College Dublin:
Prof. A. W. Conway.

Italien.

R. Governo Italiano:
Prof. Francesco Severi, Presidente della Delagazione, Roma.
Prof. Enrico Bompiani, Roma.
Prof. Mauro Picone, Napoli.

Accademia Pontaniana, Napoli:
Prof. Roberto Marcolongo, Napoli.
Prof. Mauro Picone, Napoli.
Prof. Gaetano Scorza, Napoli.
Prof. lib. doc. Jederico Amodeo, Napoli.

Le Assicurazioni d'Italia:
Prof. Luigi Amoroso, Roma.

Circolo Matematico di Palermo:
Prof. Michele Cipolla, Palermo.
Prof. Michele de Franchis, Palermo.
Prof. Giovanni Giorgi, Roma.
Prof. Tullio Levi-Civita, Roma.
Prof. Corradino Mineo, Palermo.
Prof. Francesco Severi, Roma.
Prof. Vittorio Strazzeri, Palermo.
Prof. Pietro Tortorici, Palermo.

Istituto Italiano degli Attuari:
Prof. Luigi Amoroso, Roma.
Prof. Ugo Broggi, Milano.

Istituto Matematico della Regia Università di Cagliari:
Prof. Umberto Crudeli, Direttore.
Prof. Enea Bortolotti, Bologna.
Prof. Gabriele Mammana.
Prof. Gaspare Mignosi.

Istituto Nazionale delle Assicurazioni:
Prof. Raffaele Cultrera, Roma.
Dott. Costanza Ferrara, Roma.

Laboratorio di Matematica:
Prof. Filadelfo Insolera, Direttore, Torino.

Pontificia Accademia delle Scienze i nuovi Lincei:
Prof. Giovanni Giorgi, Roma.
Prof. Tullio Levi-Civita, Roma.

R. Accademia d'Italia:
Prof. Francesco Severi, Roma.

R. Accademia Nazionale de Lincei:
Prof. Gaetano Scorza, Napoli.

R. Academia Peloritana di Messina:
Prof. Giovanni Giambelli, Messina.
Dott. Paolo Bertucelli (Assistente volontario).

R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna:
Prof. Salvatore Pincherle.
Prof. Ettore Bortolotti.
Prof. Pietro Burgatti.
Prof. Umberto Puppini.

R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Modena:
Prof. Ettore Bortolotti, Bologna.

R. Istituto Lombardo:
Prof. Comm. Ugo Broggi, Milano.

R. Istituto Sup. di Scienzi Economiche e Commerciali, Venezia:
Prof. C. A. Dell'Agnola, Venezia.

R. Ministero degli Affari Esteri:
Prof. Alfredo Perna, Roma.

R. Scuola d'Ingegneria Navale, Genova:
Prof. Gino Loria.

R. Scuola d'Ingegneria di Padova:
Prof. Annibale Comessatti.
Prof. Angelo Tonolo

R. Università di Messina:
Prof. Vittorio Martinetti, Messina.

R. Università di Napoli:
Prof. Mauro Picone.

R. Università di Pavia:
Dr. Luigi Berzolari.
Dr. Luigi Brusotti.

R. Università degli Studi di Bologna:
Prof. Salvatore Pincherle.

R. Università degli Studi di Milano:
Prof. Bruno Finzi.

R. Università degli Studi di Padova:
Prof. Annibale Comessatti, Direttore del Seminario Matematico, Padova.
Prof. Angelo Tonolo.

Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti, Padova:
Prof. Annibale Comessatti.
Prof. Ernesto Laura.
Prof. Angelo Tonolo.

Reale Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti:
Prof. Carlo Alberto Dell'Agnola, Dirett. dell'Istituto Sup. di Scienze economiche e commerciali di Venezia.
Prof. Annibale Comessatti, Padova.
Prof. Ernesto Laura, Università di Padova.

Regia Università degli Studi di Cagliari:
Prof. Umberto Crudeli, Direttore.
Prof. Enea Bortolotti, Bologna.
Prof. Gabriele Mammana.
Prof. Gaspare Mignosi.

Scuola di Matematica, Messina:
Prof. Giovanni Giambelli, Messina.

Seminario Matematico di Padova:
Prof. Annibale Comessatti.
Prof. Angelo Tonolo.

Società Italiana di Fisica, Bologna:
Prof. Dario Graffi, Bologna.

Società Italiana per il Progresso delle Scienze:
Prof. Gaetano Scorza, Napoli.

Società Italiana delle Scienze:
Prof. Francesco Severi, Roma.

Società Reale di Napoli. Accademia delle Scienze e Fisiche e Matematiche, Napoli:
Prof. Roberto Marcolongo, Napoli.

Università di Ferrara:
Prof. Margherita Piazzolla-Beloch.

Università di Pisa:
Prof. Leonida Tonelli.

Jugoslavien.

Académie Royale Serbe des Sciences:
Prof. Antoine Bilimovitch, Belgrade.
Prof. Michel Petrovitch, Belgrade.

Groupe Académique Russe en Yougoslavie:
Prof. Nikolas Saltykow, Belgrade.

Lettland.

Universität von Lettland:
Prof. Edgars Lejneeks, Riga.

Mexiko.

Mexikanische Regierung:
Konsul Servando Barrera-Guerra, Mex. Generalkonsulat Zürich.

Neu-Seeland.

Government of New Zealand:
Prof. A. R. Forsyth, London.

New Zealand Institute:
Dr. L. C. Comrie, R. Naval College, Greenwich.
Mr. J. W. Harding, Emmanuel College, Cambridge University.

University of New Zealand:
Dr. L. J. Comrie, R. Naval College, Greenwich.
Prof. H. W. Turnbull, St. Andrews.

Victoria University College, Wellington:
Mr. J. W. Harding, Cambridge University.

Nicaragua.

Regierung von Nicaragua:
Herr Jorge Bein, Konsul in Zürich.

Norwegen.

Norwegische Regierung:
Prof. Alf Guldberg, Universität Oslo.
Prof. R. Tambs Lyche, Techn. Hochschule, Trondheim.
Prof. Carl Stoermer, Universität, Oslo.

Norwegische Aktuarvereinigung:
Prof. Alf Guldberg.

Norwegischer Ingenieurverein:
Prof. Edgar B. Schieldrop, Oslo.

Norwegische Technische Hochschule, Trondheim:
Prof. Ralph Tambs Lyche, Trondheim.

Universität von Oslo:
Prof. Alf Guldberg.
Prof. Carl Stoermer.

Oesterreich.

Oesterreichische Regierung:
Prof. Wilhelm Wirtinger, Wien.

Akademie der Wissenschaften in Wien:
Prof. Wilhelm Wirtinger.

Universität Wien:
Prof. Wilhelm Wirtinger.

Palästina.

Hebräische Universität, Palästina:
Prof. Michael Fekete, Jerusalem.
Prof. Adolf Fraenkel, University, Kiel, Germany.
Dr. Binyamin Amira, Jerusalem.

Persien.

Gouvernement Persan:
Prof. Louis Long, Téhéran.

Polen.

Gouvernement Polonais:
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.

Délégués techniques du Ministère d'éducation:
Prof. Samuel Dickstein, Warszava.
Prof. Straszewicz, Warszava.

Académie Górnicza w Krakowie:
Prof. Antoni Hoborski, Kraków.

Académie Polonaise des Sciences et des Lettres:
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.
Prof. Stanislaw Zaremba, Kraków.

Ecole Polytechnique de Lwów:
Prof. Casimir Kuratowski, Warszava.

Ecole Polytechnique de Varsovie:
Prof. François Leja, Warszava.
Prof. Straszewicz, Warszava.

Institut Mianowski, Warszava:
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.

Société Polonaise de Mathématique:
Prof. B. Knaster, Warszava.
Prof. K. Kuratowski, Warszava.
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.
Prof. A. Zygmund, Wilno.

Société des Sciences et des Lettres de Varsovie:
Prof. Stefan Mazurkiewicz, Warszava.
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.

Université Jagiellonski w Krakowie:
Prof. Alfred Rosenblatt, Kraków.
Prof. Witold Wilkosz, Kraków.
Prof. Stanislaw Zaremba, Kraków.

Université Stefano Batorego w Wilnie:
Prof. Stefan Kempisty, Wilno.
Prof. Jules Rudnicki, Paris.

Université de Varsovie:
Prof. Waclaw Sierpiński, Warszava.

Portugal.

Gouvernement de Portugale:
Prof. da Costa Lobo, Lisbonne.

Ecole Navale:
Prof., Le Commandant Jaime Henrique de Sa Viana Couceiro, Lisbonne.

Université de Coimbra:
Prof. da Costa Lobo, Lisbonne.

Rumänien.

Académie Roumanienne, Bukarest:
Prof. G. Tzitzéica, Bukarest.

Direction Générale des Chemins de Fer Roumains:
Ing. Joan Chitulescu, Bukarest.

Ecole Polytechnique de Bucarest:
Prof. D. Pompeiu.
Prof. G. Tzitzéica.

Institut Français des Hautes Etudes, Bukarest:
Prof. G. Tzitzéica, Bukarest.

Société des Sciences de Cluj:
Prof. Pierre Sergesco, Cernăuti.

Université de Cernăuti:
Prof. S. Stoilov.
Prof. Gh. Vrânceanu.

Université de Cluj:
Prof. Pierre Sergesco, Cernăuti.

Russland (U. S. S. R.)

Regierung, U. S. S. R.:
Prof. P. Alexandroff, Moskau.
Prof. E. Kolman, Moskau.
Prof. H. Muentz, Leningrad.
Prof. N. Tschebotaröw, Kasan.

Berginstitut Leningrad:
Prof. Michael Akimoff, Leningrad.

Forschungs-Institut der Ukraine, Kieff:
Prof. M. Kourensky, Kieff.
Prof. M. Kravtschuk, Kieff.
Prof. N. M. Kryloff, Kieff.
Prof. M. G. Pfeiffer, Kieff.

Kommunistische Akademie (Moskau):
Prof. E. Kolman, Moskau.

Mathematisches Institut der Ukraine (Kharkow):
Prof. M. Orloff.

Physikalische und Mathematische Gesellschaft an der Universität von Kasan:
Prof. Nicolas Parfentieff.

Universität Kasan:
Prof. N. Tschebotaröw, Kasan.

Wissenschaftl. Forschungsinstitut f. Mathematik und Mechanik an der Universität zu Leningrad:
Prof. H. Muentz, Leningrad.

Schweden.

K. Akademie der Wissenschaften, Schweden:
Prof. Torsten Carleman, Stockholm.

K. Physiographische Gesellschaft in Lund:
Prof. Marcel Riesz, Lund.

K. Wissenschaftliche Gesellschaften, Uppsala:
Prof. T. Nagell, Uppsala.

Mathematisches Institut Mittag-Leffler:
Prof. T. Carleman, Djursholm.

Schwedische Aktuarvereinigung, Stockholm:
Prof. Harald Cramer, Stockholm.
Dr. K. G. Hagström, Stockholm.
Dr. Folke Malmquist, Stockholm.
Prof. E. Phragmén, Stockholm.

Universität Lund:
Prof. Marcel Riesz.

Schweiz.

Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich:
M. le Recteur M. Plancherel, Professeur.
M. le Doyen L. Kollros, Professeur.

Kantonsschule Chur:
Dr. Karl Merz.

Kantonsschule Zürich:
Rektor E. Amberg.
Prorektor E. Mettler.

Observatoire Astronomique de Genève:
Prof. Georges Tiercy, Genève.

Société Mathématique Suisse:
Prof. Gustave Juvet, Lausanne.

Universität Basel:
Prof. W. Matthies, Riehen.

Universität Bern:
Prof. Crelier.
Prof. Scherrer.

Université de Fribourg:
Prof. Séverin Bays.

Université de Genève:
Prof. Henri Fehr.
Prof. R. Wavre.

Université de Lausanne:
M. le Recteur Arnold Reymond.
Prof. Gustave Juvet.

Université de Neuchâtel:
Prof. L. G. Du Pasquier.

Universität von Zürich:
Prof. F. Fleiner, Rektor.

Verein Schweizerischer Mathematiklehrer:
Rektor Paul Buchner, Basel.
Dr. S. Gagnebin, Neuchâtel.

Spanien.

Gouvernement de la République Espagnole:
Prof. José Ma. Torroja, Madrid.

Académie des Sciences, Madrid:
Don José G. Alvarez Ude, Madrid.
Prof. José Ma. Torroja, Madrid.

Académie des Sciences et des Arts, Barcelona:
Prof. Antonio Torroja, Barcelona.

Ecole Centrale des Ingénieurs:
Prof. Charles Mataix, Madrid.
Mr. Alphonse Toran, Madrid.

Société Espagnole d'Etudes Photogrammétriques, Madrid:
Prof. José Ma. Torroja, Madrid.

Union Nationale de Mathématiques d'Espagne:
Prof. José Ma. Torroja, Madrid.

Université de Barcelona:
Prof. Antonio Torroja, Barcelona.

Tschechoslowakei.

Académie Tchèque des Sciences et des Arts à Prague:
Prof. Eduard Čech, Université Masaryk de Brno.

Český Ústřední Spolek Učitelů Vysokoškolských:
Ph. Dr. Bohumil Bydžovský, Praha.

Deutsche Universität in Prag:
Prof. Ludwig Berwald, Prag.

Jednota Československých Matematiku v Praze:
Prof. V. Jarník, Prag.
Prof. J. Vojtech, Prag (Université Charles IV).

Masarykova Akademie Prace (Académie Masaryk du Travail):
Prof. Q. Vetter, Prag.

Université de Brno (Université Masaryk):
Prof. B. Hostinský, Brno.

Türkei.

Constantinople Women's College:
Prof. Frances Harshbarger, Istambul.

Ungarn.

Budapester Kgl. Ungarische Pazmany Peter Universität:
Prof. L. Fejer, Budapest.

Ungarische Akademie der Wissenschaften:
Prof. L. Fejer, Budapest.

Universität Szeged:
Prof. Alfréd Haar.
Prof. Béla Kerékjártó.
Prof. Frigyes Riesz.

Uruguay.

Faculté Uruguayenne des Etudes d'Ingénieur et Branches Annexes:
Hector L. Colombo, Konsul von Uruguay, Grenoble.

Teilnehmerliste

Ackeret, Prof., Jakob (Zürich)
Adams, Prof., Raymond (Providence)
Frau Adams
Adhémar, Prof., Vicomte Robert d' (Lambersart)
Adler, Herr, F. (Zürich)
Aeppli, Herr, Felix (Zürich)
Ahlfors, Prof., Lars V. (Abo)
Alexander, Prof., J. W. (Princeton, U.S.A.)
Alexandroff, Prof., P. (Moskau)
Alt, Dr., Franz (Wien)
Amaldi, Prof., Ugo (Roma)
Amberg, Prof., Rektor, E. (Zürich)
Amirà, Dr., Binyamin (Jerusalem)
Amoroso, Prof., Luigi (Roma)
Frau Amoroso
Andersen, Prof., Aksel (Kopenhagen)
Archibald, Prof., R. C. (Providence)
Axer, Dr., Alexander (Zürich)
Badesco, Prof., Radu (Cluj)
Baer, Dr., Reinhold (Halle a. S.)
Frau Baer
Baeschlin, Prof., C. F. (Zürich)
Frau Baeschlin
Bannow, Frl., Erna (Göttingen)
Barinaga, Prof., José (Madrid)
Barnett, Dr., J. A. (Cincinnati)
Frau Barnett
Barrera-Guerra, Konsul, S. von Mexiko (Zürich)
Barriol, Herr, Alfred (Paris)
Bassi, Dr., Achille (Firenze)
Bath, Dr., Frederick (Dundee)
Batlle, Herr, Robert (Val-près-le-Puy)
Bauermeister, dipl. math., M. (Zürich)
Baylis, Frl., Bertha M. (Lincoln)
Bays, Prof., Sévérin (Fribourg)
Frau Bays
Beck, Dr., Emil (Zürich)
Behnke, Prof., Heinrich (Münster i. W.)
Frau Behnke
Belardinelli, Prof., G. (Jesi, Marche)
Belinfante, Dr., M. J. (Amsterdam)
Benz, dipl. math., Eduard (Winterthur)
Frl. Hanna Schellenberg
Bergmann, Dr., Stefan (Berlin)
Bernays, Prof., Paul (Göttingen)
Bernstein, Dr., Vladimiro (Milano)
Frau Elena Bernstein
Berwald, Prof., Ludwig (Prag)
Frau Berwald
Besimo, Herr, H. (Zürich)
Bessel-Hagen, Prof., Erich (Bonn a. Rh.)
Bieberbach, Prof., Ludwig (Berlin)
Biernacki, Prof., Miécislas (Poznań)
Biezeno, Prof., C. B. (Delft)
Bilimovitch, Prof., Antoine (Belgrade)
Bindschedler, Dr., C. (Zürich)
Birkhoff, Herr, Garrett (Cambridge)
Blanc, Herr, Charles (Lausanne)
Blaser, Prof., Ed. (Genf)
Blaschke, Prof., W. (Hamburg)
Blichfeldt, Prof., H. F. (Stanford)
Blumenthal, Prof., Otto (Aachen)
Frau Blumenthal
Blumer, Herr, Fritz (Basel)
Bochner, Dr. phil., S. (München)
Bögel, Dr., Karl (Schulpforte)
Bohr, Prof., Harald (Kopenhagen)
Bompiani, Prof., Enrico (Roma)
Frau Bompiani
Borel, Prof., Emile (Paris)
Borsuk, Dr., Karol (Warschau)
Bortolotti, Prof., Ettore (Bologna)
Boulad bey, Prof., Farid (Le Caire)
Bourgin, Prof., David (Urbana)
Frl. Minna Falk
Brandt, Prof., Heinrich (Halle a. S.)
Frau Brandt
Brelot, Dr., Marcel E. (Cépoy, France)
Bremekamp, Prof., H. (Delft)
Brink, Prof., R. W. (Minnesota)
Frau Brink
Brouwer, Prof., E. (Amsterdam)
Brunner, dipl. math., Otto (Meilen)
Brusotti, Prof., Luigi (Pavia)

Bucher, dipl. math., J. (Luzern)
Buchner, Rektor, Paul (Basel)
Büsser, Herr, Albert (Schmerikon)
Buhl, Prof., A. (Toulouse)
Burchnall, Herr, J. L. (Durham)
Burckhardt, Dr., J. J. (Zürich)
Buzano, Dr., Piero (Torino)
Cabras, Prof., Angelina (Intra)
Frau Augusta Onnis
Cahen, Prof., Armand (Paris)
Frl. Andrée Cahen
Cairns, Prof., W. D. (Oberlin)
Frau Cairns
Candido, Dr., Giacomo (Brindisi)
Carathéodory, Prof., C. (München)
Fräulein Despina Carathéodory
Carleman, Prof., T. (Djursholm)
Frau Carleman
Carrus, Prof., S. (Algers)
Cartan, Prof., Elie (Paris)
Cartan, Prof., Henri (Strasbourg)
Cartwright, Dr., M. L. (Cambridge, England)
Casazza, Prof., Giuseppe (Milano)
Castelnuovo, Prof., Guido (Roma)
Cattani, Herr, Otto (Zürich)
Cauer, Dr., Wilhelm (Göttingen)
Cèch, Prof., Eduard (Brno)
Cerf, Prof., G. (Strasbourg)
Cervenka, Inspecteur, Ladislav (Prag)
Chapas, Prof., Georges (Lyon)
Charpentier, Dr., Marie (Poitiers)
Chazy, Prof., Jean (Paris)
Chevalley, Herr, Claude (Paris)
Chitulescu, Ingenieur, Joan (Bukarest)
Frau Chitulescu
Christen, Dr., Hans (Zürich)
Chuard, Prof., Jules (Lausanne)
Cimmino, Prof., Gianfranco (Novara)
Cinquini, Dr., Silvio (Pisa)
Combridge, Dr., J. T. (London)
Comessatti, Prof., Annibale (Padova)
Frau Comessatti
Frl. Maria Camelia Comessatti
Conway, Prof., A. W. (Dublin)
Frl. Conway
Corput, Prof., J. G. van der (Groningen)
Cotton, Prof., Emile (Grenoble)
Frau Cotton
Couceiro de Sa Viana, Prof., J. H. (Lisboa)
Frau de Sa Viana Couceiro
Courant, Prof., R. (Göttingen)
Frau Courant
Cowley, L., Elisabeth B. (Pittsburgh)
Crelier, Prof., L.(Berne)
Frau Crelier
Cremer, Dr., Hubert (Köln a. Rh.)
Criticos, Prof., N. (Athen)
Crudeli, Prof., Umberto (Cagliari)
Cultrera, Herr, Raffaele (Roma)
Frau Cultrera
Cummings, Prof., Louise (New York)
Frau Georges Dickson
Curzon, Dr., H. E. J. (London)
Dändliker, Dr., K. (Solothurn)
Dallot, Prof., Renée (Ile d'Ouessant, France)
Daniell, Prof., P. J. (Sheffield)
Dantzig, Dr., David, van (Ryswyk)
Darmois, Prof., Georges (Nancy)
Frau Darmois
Darrieus, Herr, G. (Houilles S. & O.)
Delens, Herr, Paul (Le Havre)
Frau Delens
Frl. Jeanne Delens
Dell'Agnola, Prof., Carlo A. (Venezia)
Herr Dell'Agnola
Delsarte, Prof., M. J. (Nancy)
Demtchenko, Dr., Basile (Paris)
Denizot, Prof., Alfred (Poznán)
Desforge, Prof., Julien (Paris)
Deuring, Dr., M. (Göttingen)
Devisme, Herr, Jacques (Le Havre)
Devisme, Frl., Odette (Le Havre)
Dickstein, Prof., Samuel (Warszawa)
Dieudonné, Dr., Jean (Paris)
Dines, Prof., Lloyd L. (Chicago)
Dive, Prof., Pierre (Clermont-Ferrant)
Dixon, Prof., A. C. (Malone)
Doetsch, Prof., Gustav (Freiburg i. Br.)
Dorwart, Dr., Harold D. (Williamstown)
Drach, Prof., Jules (Paris)
Droste, Prof., J.(Leiden)
Drumaux, Prof., Paul (Gand)

Duarte, Ingénieur, F. J. (Genève)
Dubreil, Prof., Paul (Lille)
Frau Dubreil
Dumas, Prof., Gustave (Lausanne)
Dumas, Prof., Samuel (Lausanne)
Dürr, Prof., K. (Zürich)
Dusl, Prof., Karel (Prag)
Eisele, Frl., Caroline (New York)
Emde, Prof., Fritz (Stuttgart)
Engström, Prof., Howard (New Haven)
Ernst, Herr, J. W. (Zürich)
Escuela Central de Ing. Industriales (Madrid)
Establier, Dr., A. (Paris)
Estermann, Dr., Th. (London)
Facultad de Ciencias de Zaragoza
Falkeisen-Escher, Herr, E. O. (Zürich)
Frau Falkeisen-Escher
Fano, Prof., Gino (Torino)
Fantappié, Prof., L. (Palermo)
Favard, Prof., J. (Grenoble)
Fehr, Prof., Henri (Genève)
Feinler, Herr, Franz J. (Akron)
Fejér, Prof. Dr., L. (Budapest)
Fekete, Prof., Michael (Jerusalem)
Féraud, Dr., L. (Genève)
Finsler, Prof., Paul (Zürich)
Finzi, Prof., Bruno (Milano)
Fischer, Dr., Anna (Leningrad)
Fisher, Prof., James (Houghton)
Frau Fisher
Fjeldstad, Dr., J. E. (Bergen)
Frau Fjeldstad
Fladt, Dr., Kuno (Stuttgart-Vaihingen)
Flamant, Frau, Georgette (Strasbourg)
Flamant, Prof., Paul (Strasbourg)
Flatt, a. Rektor, R. (Basel)
Fleiner, Rektor der Universität, F. (Zürich)
Frau Fleiner
Fontinoy, Herr, Gabriel (Waremme)
Foradori, Dr. E. (Innsbruck)
Forsyth, Prof., A. R. (London)
Foster, Dr., Alfred L. (Göttingen)
Fraenkel, Prof., Adolf (Kiel)
Frau Fraenkel
Frau Neresheimer
de Franchis, Prof., M. (Palermo)
Franel, Prof., J. (Zürich)
Frick, Dr., Heinrich (Zürich)
Friedli, Prof., Werner (Bern)
Friedrichs, Prof., K. (Braunschweig)
Fueter, Herr, Eduard (Zollikon)
Fueter, Prof., Rudolf (Zürich)
Frau Fueter
Gagnebin, Prof., S. (Neuchâtel)
Gagnebin, Frau, M. (Neuchâtel)
Galleno, Prof., Pietro (Sarzana)
Garcia, Prof., David (Solsona, Spanien)
Gassmann, Dr., Fritz (Aarau)
Geiser, Prof., C. F. (Zürich)
Frl. Geiser
Geppert, Prof., H. (Giessen)
Frau Hedi Geppert
Geppert, Dr., Maria Pia (Giessen)
Gérardin, Prof., A. (Nancy)
Geymonat, Dr. Ludovico (Torino)
Giambelli, Prof., Giovanni (Messina)
Herr Moralito Teofonie
Giesecke, Dr., Alfred (Leizig)
Giorgi, Prof., Giovanni (Roma)
Glenn, Prof., O. E. (Lansdowne)
Glogg, Herr, A. W. (Zürich)
Frau Glogg
Godeaux, Prof., L. (Liége)
Golab, Dr., Stanislas (Kraków)
Goldziher, Prof., Karl (Budapest)
Herr Robert Beck
Gonseth, Prof., F. (Zürich)
Frau Gonseth
Graffi, Prof., Dario (Bologna)
Grammel, Prof., R. (Stuttgart)
Graustein, Prof., W. C. (Cambridge, U.S.A.)
Frau Graustein
Gray, Prof., J. G. (Glasgow)
Grell, Dr., H. (Jena)
Grossmann, Dr., Carl (Zürich)
Grossmann, Prof., M. (Zürich)
Gruner, Prof., P. (Bern)
Guérard des Lauriers, Herr, Michel (Kain, Belgien)
Güttinger, Dr., Paul (Zürich)
Gugino, Herr, E. (Messina)
Guilleaume, Dr., Ed. (Neuchâtel)

Guldberg, Prof., Alf (Oslo)
Frau Guldberg
Guldberg, Herr, Gustav (Oslo)
Gurney, Frl., Margaret (Washington)
Gut, Dr., Max (Zürich)
Haab, a. Bundesrat, R. (Zürich)
Haack, Dr., W. (Danzig)
Haag, Prof., J. (Besançon)
Haar, Prof., A. (Szeged)
Habicht, Dr., C. (Schaffhausen)
Hadamard, Prof., Jacques (Paris)
Härlen, Dr., H. (Stuttgart-Kaltental)
Hahn, Prof., H. (Wien)
Hall, Herr, Philipp (Cambridge)
Halpern, Frl., Ada (Lwów)
Hamburger, Prof., H. (Köln a. Rh.)
Frau Hamburger
Hamel, Prof., G. (Berlin W.)
Hancock, Frl., Ethel M. (Peking)
Frl. S. H. Hancock (Newport)
Frl. D. L. Hancock (Newport)
Hardy, Prof., G. H. (Cambridge)
Frl. G. E. Hardy
Frau M. Liddiard
Frl. Jessie Liddiard
Harries, Herr, E. B. (London)
Harshbarger, Prof., Frances (Istambul)
Hasse, Prof., Helmut (Marburg a. d. L.)
Haupt, Prof., Otto (Erlangen)
Heffter, Prof., L. (Freiburg i. Br.)
Herbener, Dr., E. (Zug)
Herter, Herr, Max (Winterthur)
Heyting, Dr., Arend (Enschede)
Hilbert, Prof., D. (Göttingen)
Frau Hilbert
Hilgard, Prof., K. E. (Zürich)
Hille, Prof., Einar (Princeton)
Frau Hille
Hiong, Herr, Kin-Lai (China)
Herr Ping-Ling Hiong
Hirsch, Prof., A. (Zürich)
Hoborski, Prof., Antoni (Kraków)
Hölder, Dr., E. (Leipzig)
Hössjer, Dr , Gustav (Malmö)
Hofreiter, Dr., Nikolaus (Wien)
Hollcroft, Prof., Temple Rice (New York)
Hollcroft, Frau, Mary (New York)
Holman, Frl., Anna E. (Cambridge, U.S.A.)
Holz, Frl., Dora (Stuttgart)
Honegger, Herr, Walter (Zürich)
Hopf, Prof., H. (Zürich)
Frau Hopf
Hopkins, Dr., Ch. (Urbana)
Horák, Prof., Zdeněk (Prag)
de Horatiis, Prof., M. (Florenz)
Hornich, Dr., Hans (Wien)
Hostinsky, Prof., B. (Brno)
Hruska, Prof., Vaclav (Prag)
Hsu, Dr., Ko-Pao (Schanghai)
Huber-Stockar, Dr., Emil (Zürich)
Hürlimann, Herr, Heinrich (Zürich)
Frau Hürlimann
Hurewicz, Dr., W. (Amsterdam)
Hurwitz, Prof., Wallie A. (Ithaca)
Husson, Prof., Edouard (Nancy)
Frau Husson
Jaccottet, Prof., A. (Lausanne)
Insolera, Prof., Filadelfo (Torino)
Frau Insolera
Institut de Mathématiques (Strasbourg)
Istituto Nazionale delle Assicurazioni (Roma)
Istituto Superiore di Scienze Economiche e Commerciale (Venezia)
Ivanoff, Dr., Alexander (Sofia)
Frau Ivanoff
Jacob, Dr., Mosè (Triest)
Janet, Prof., Maurice (Caen)
Frau Janet
Jardetzky, Prof., Wenceslas (Belgrade)
Jarník, Prof., V. (Prag)
Jecklin, Dr., Heinrich (Zürich)
Frau Jecklin
Jessen, Dr., Börge (Kopenhagen)
Jöhr, Dr., A. (Zürich)
Frau Jöhr
Johansson, Dr. phil., Ing. (Strömmen bei Oslo)
Julia, Prof., Gaston (Paris)
Jungen, Dr., R. (Zürich)
Junger, dipl. ing., Aug. (Rüschlikon)
Juvet, Prof., Gustave (Lausanne)
Frau Juvet
Juzi, Prof., O. (Küsnacht)

Jyanaga, Herr, Skökichi (Tokio)
Käding, dipl. Math., Walter (Hamburg)
Kálmár, Dr., F. (Szeged)
Kamke, Prof., Erich (Tübingen)
Kampé de Fériet, Prof., Joseph (Lille)
Kanarsch, Dr., S. (Zürich)
Kapferer, Prof., H. H. (Freiburg i. Br.)
Karamata, Dr., Jovan (Beograd)
Kasner, Prof., Edward (New York)
Kaufmann, Dr., B. (Heidelberg)
Kemmer, Herr, Nikolai (Zürich)
Kennedy, Frl., Margaret D. (Cambridge)
Kerékjártó, Prof., B. v. (Szeged)
Kienast, Prof., A. (Zürich)
Frau Kienast
Kiepert, Prof., L. (Hannover)
Frau Kiepert
Kinzler, Herr, Gustav (Basel)
Kistler, Dr., Hugo (Biel)
Klöti, Dr., Ständerat, E. (Zürich)
Knaster, Prof., B. (Warschau)
Kneser, Prof., H. (Greifswald)
Knopp, Prof., Konrad (Tübingen)
Koebe, Prof., Paul (Leipzig)
König, Prof., Robert (Jena)
Köthe, Dr., G. (Münster i. W.)
Frau Köthe
Kogbetliantz, Prof., Ervand (Paris)
Kollros, Prof., L. (Zürich)
Frau Kollros
Kolman, Prof., E. (Moskau)
Frau Kolman
Kommerell, Prof., K. (Tübingen)
Koopmann, Prof., Bernard (New York)
Koppenfels, Dr., Werner v. (Hannover)
Korn, Prof., Arthur (Berlin)
Frau Korn
Kourensky, Prof., M. (Kieff)
Kraitchik, Prof , Maurice (Bruxelles)
Frau Kraitchik
Krakowski, Dr., V. (Zürich)
Krall, Prof., Giulio (Roma)
Kravtchuk, Prof., Michel (Kieff)
Krebs, Dr., Henri (Bern)
Krull, Prof , W. (Erlangen)
Kryloff, Prof., N. M. (Kieff)
Kuratowski, Prof., Casimir (Warschau)
Kurschak, Prof., J. (Budapest)
Kyrtsis, Herr, J. P. (Athen)
Labocetta, Ing., L. (Roma)
Frl. Rosaria Labocetta
Frl. Guglielma Labocetta
Laboratorio di Matematica (Torino)
Lampariello, Dr., Giovanni (Roma)
Landau, Prof., Edmund (Göttingen)
Frau Landau
Lange-Nielsen, Herr, F. (Oslo)
Lardy, dipl. math., Pierre (Zürich)
Leau, Prof., Léopold (Nancy)
Frau Leau
Lehr, Dr., Marguerite (Mawr-Pennsylvania, U. S. A.)
Leja, Prof., F. (Warschau)
Lejneeks, Prof., E. (Riga)
Frl. Lejneeks
Lense, Prof., J. (München)
Frau Lense
Lepage, Prof., Th. (Verviers)
Le Roux, Prof., Jean (Rennes)
Frl. Gabrielle Le Roux
Levi-Cività, Prof., Tullio (Roma)
Frau Levi-Cività
Lévy, Prof., Paul (Paris)
Lewis, Prof., Florence (Baltimore)
Lewy, Dr., H. (Göttingen)
Li, Herr, Ta (München)
Lichtenstein, Prof., L. (Leipzig)
Liebl, Dr., H. (Basel)
Frau Trudy Liebl
Liebmann, Prof., H. (Heidelberg)
Frau Liebmann
Lietzmann, Dr , W. (Göttingen)
Frau Lietzmann
Linder, dipl. math., Arthur (Bern)
Linfoot, Dr., E. H. (Sheffield)
Lipka, Dr , St. (Szeged)
Livens, Prof., George H. (Cardiff)
Locher, Dr., Louis (Winterthur)
Frau Locher-Ernst
Loebell, Prof., Frank (Stuttgart)
Loeffler, Dr., Ad. (Rolle)
Long, Prof., Louis (Téhéran)
Lorey, Prof., W. (Leipzig)

Loria, Prof., Gino (Genova)
Frau Loria
Lotz, Dr., Irmgard (Göttingen)
Lubben, Dr., R. G. (Austin, U. S. A.)
Lüssy, dipl. math., Willy (Horgen)
Luse, Prof., Eva May (Jowa)
Macintyre, Herr, A. J. (England)
Magnus, Dr., W. (Göttingen)
Mahler, Dr., Kurt (Göttingen)
Maier, Prof., Wilh. (Lafayette, U. S. A.)
Frau Maier
Maillet, Herr, Edmond (Angers)
Frau Maillet
Fräulein Madeleine Maillet
Malmquist, Dr., Folke (Stockholm)
Mandelbrojt, Prof., S. (Clermont-Ferrand)
Frau Mandelbrojt
Manes, Prof., A. (Berlin)
Marchand, Prof., E. (Zürich)
Frau Marchand
Marchaud, Prof., André (Marseille)
Frau Marchaud
Martinetti, Prof., Vitt. (Messina)
Marty, Dr., F. (Paris)
Mason, Prof., T. E. (West Lafayette)
Frau Mason
Miss Jean Mason
Miss Elisabeth Heiss
Maspoli, Dr., G. (Lugano)
Mataix, Prof., Charles (Madrid)
McConnell, Prof., Alb. J. (Dublin)
Mehmke, Prof., R. (Stuttgart-Degerloch)
Meidell, Prof., Birger (Oslo)
Meissner, Prof., E. (Zollikon)
Menger, Prof., Karl (Wien)
Mentré, Prof., Paul (Nancy)
Herr Dr. C. F. Clapier (Alais)
Merriman, Prof., Gaylord (Cincinnati)
Merz, Dr., K. (Chur)
Mettler, Prorektor, Dr., E. (Zürich)
Meyer, Dr. A., Bundesrat (Bern)
Fräulein Bertha Meyer
Meyer-Jaccoud, Ingenieur, A. (Zürich)
Milloux, Prof., Henri (Strasbourg)
Milne, Prof., E. A. (Oxford)
Milne-Thomson, Prof., L. M. (London)
Mimura, Herr, Yukio (Tokio)
Frau Mimura
Minetti, Prof. Ing., S. (Roma)
Mirimanoff, Prof., B. (Genève)
Mises, Prof., R. von (Berlin)
Mitchell, Prof., U. Grant (Kansas)
Frau Mitchell
Mohrmann, Prof., H. (Giessen)
Molina, Edw. C. (New York)
Mollerup, Prof., J. (Kopenhagen)
Moore, Prof., Ch. N. (Cincinnati)
Frau Moore
Frl. Betty Jane Moore
Moore, Prof., Thomas W. (Bloomington)
Mordell, Prof., J. L. (Manchester)
Frau Mordell
Herr D. L. Mordell
Frl. F. K. Mordell
Moriya, Herr, Mikao (Marburg a. d. Lahn)
Morse, Prof., David S. (Schenectady)
Frau Morse
Morse, Prof., Marston (Cambridge U.S.A.)
Moser, Prof., Chr. (Bern)
Mosharrafa, Prof., Ali (Cairo)
Frau Mosharrafa
Motta, Bundespräsident, Dr. (Bern)
Frau Motta
Moufang, Dr., Ruth (Frankfurt a. M.)
Mousson, a. Regierungsrat, Dr., H. (Zch.)
Frau Mousson
Mühlendyck, Dr., O. (Berlin)
Müller, Prof., Conrad (Hannover)
Müller, Prof., W. (Prag)
Müntz, Prof., H. (Leningrad)
Frau Müntz
Mulholland, Dr., Hugh P. (Newcastle)
Muller, Dr., Maurice (Zürich)
Myers, Herr, S. B. (Zürich)
Nagell, Prof., Trygve (Upsala)
Frau Dr. Bianca Nagell
Nagumo, Herr, Mittio (Göttingen)
Nagy, Prof., Jul. v. (Szeged)
Narasinga, Prof., M. A. (Annamalainayar, Indien)
Neugebauer, Prof., O. (Göttingen)
Neumann, Herr, Bernhard (Berlin)
Neumann, Dina (Genf)

Nevanlinna, Dr. F. (Helsingfors)
Nevanlinna, Prof., Rolf (Helsingfors)
Neville, Prof., E. H. (Reading)
Frau A. M. E. Neville
Frau E. Neville
Newman, Herr, M. H. A. (Cambridge)
Nicolesco, Prof., Miron (Bukarest)
Frau Nicolesco
Nielsen, Prof., Jacob (Kopenhagen)
Noether, Prof., Emmy (Göttingen)
Ore, Prof., Oystein (New Haven)
Orloff, Prof. (Charkow)
Oss, Dr., S. L., van (Oegstgeest)
Palazzo, Dr., Elena (Roma)
Paley, Prof., R. A. C. (Cambridge, U.S.A.)
Papaïoannou, Prof., C. P. (Athènes)
Du Pasquier, Prof., L. G. (Neuchâtel)
Pauli, Prof., W. (Zürich)
Pedersen, Dr., Jens (Kopenhagen)
Frau Bertha Pedersen
Frl. Nina Pedersen
Pérès, Prof., Joseph (Marseille)
Perna, Herr, A. (Roma)
Perrin, Herr, Louis (Bouconville, Aisne)
Perron, Prof., O. (München)
Peschl, Dr., E. (Jena)
Petersson, Dr., H. (Hamburg)
Petrovitch, Prof., M. (Belgrad)
Pfeiffer, Prof., M. G. (Kieff)
Piazzolla-Beloch, Prof., Marghuerita (Ferrara)
Piccard, Dr., Sophie (Neuchâtel)
Frl. Lucetta Leuba
Picone, Prof., M. (Neapel)
Pincherle, Dr., Leo (Bologna)
Pincherle, Prof., Salvatore (Bologna)
Frau Pincherle
Plancherel, Rektor der Eidg. Techn. Hochschule, M. (Zürich)
Frau Plancherel
Plâtrier, Prof. (Paris)
Pöschl, Prof., Th. (Karlsruhe)
Pohlhausen, Prof., E. (Danzig)
Politzer, Dr., Rózsa (Budapest)
Pollaczek, Dr., Felix (Berlin)
Pollaczek, Dr., Hilda (Berlin N. W.)
Pólya, Prof., G. (Zürich)
Frau Pólya
Pomey, Ing., J.-B. (Paris)
Poole, Dr., Edgar G. C. (Oxford)
Popesco, Prof., Georges (Bukarest)
Frau Popesco
Popoff, Prof., Kyrille (Sofia)
de Possel, Dr., R. (Marseille)
Frau de Possel
Prange, Prof., G. (Hannover)
Pringsheim, Prof., Alfred (München)
Frau Pringsheim
Quiquet, Prof., Albert (Paris)
Raclis, Prof., Rod. (Bukarest)
Rafael, Prof., Enrique de (Bombay)
Rainich, Prof., G. Y. (Ann Arbor)
Frau S. Rainich
Ratib, Prof., Ahmet (Istambul)
Rauch, Dr., Armand (Gougenheim, Bas-Rhin)
Rehbock, Dr., Fr. (Bonn a. Rh.)
Frl. Elisabeth Verständig
Rellich, Dr., Franz (Hamburg)
Reymond, Prof., Arnold (Lausanne)
Frau Reymond
de Rham, Dr., Georges (Lausanne)
Riabouchinsky, Prof., Dimitri (Paris)
Frau Riabouchinsky
Ricci, Prof., C. L. (Neapel)
Ricci, Prof., Giovanni (Pisa)
Richardson, Prof., R. G. D. (Providence)
Frau Richardson
Herr George W. Richardson
Riebesell, Prof., Paul (Hamburg)
Riesz, Prof., F. (Szeged)
Riesz, Prof., M. (Lund, Schweden)
Risser, Prof., R. (Paris)
Frau Risser
Roever, Prof., W. H. (St. Louis, U.S.A.)
Frau Roever
Rohn, Prof., Präsident des Schweiz. Schulrates, Arthur (Zürich)
Frau Rohn
Romañá, Herr, Antonio (Barcelona)
Rosenblatt, Prof., Alfred (Kraków)
Rosenthal, Prof., Arthur (Heidelberg)
Rothberger, Dr., Fritz (Wien)

Rowe, Prof., Ch. H. (Dublin)
Rübel, Prof., E. (Zürich)
Frau Rübel
Rudnicki, Prof., Jules (Wilna)
Rückert, Dr., Walter (Karlsruhe)
Ruse, Herr, H. C. (Edinburg)
Sakellariou, Prof., Nilos (Athen)
Saks, Dr., Stanislas (Warschau)
Frau Saks
Salkowski, Prof., E. (Berlin)
Frau Salkowski
dos Santos Lucas, Prof., Antonio (Lisboa)
Sarasin, Dr., Alexander (Basel)
Sarasin, Dr., Marie-Louise (Zürich)
Sarasin, Frl., Rosalie (Zürich)
Sard, Herr, Arthur (New York)
Herr Robert Sard
Savitch, Prof., Serge (Paris)
Saxer, Prof., W. (Zürich)
Frau Saxer
Schaake, Prof., Gerrit (Groningen)
Schaertlin, Dr., G. (Zürich)
Schauder, Dr., Julius (Lwów)
Scherrer, Dr., F. R. (Küsnacht)
Scherrer, Prof., P. (Zürich)
Scherrer, Prof., Willy (Bern)
Frau Scherrer
Schieldrop, Prof., Edgar B. (Oslo)
Frau Schieldrop
Schilling, Herr, Otto (Göttingen)
Schindler, Dr., H. (Zürich)
Schlichting, Dr., H. (Göttingen)
Schmidt, Dr., Arnold (Göttingen)
Schmidt, Prof., F. K. (Erlangen)
Schmidt, Prof., H. (Köthen, Anhalt)
Schönhardt, Prof., E. (Tübingen)
Schouten, Prof., J. H. (Delft)
Schubarth, Dr. E. (Basel)
Schulthess-Bodmer, Hans von (Zürich)
Frau von Schulthess-Bodmer
Schulz, Dr., Günther (Berlin)
Schur, Prof., I. (Berlin-Schmargendorf)
Scorza, Prof., Gaetano (Napoli)
Seifert, Dr., Herbert (Dresden)
Semple, Prof., John G. (Belfast)
Sergescu, Prof., Pierre (Cernăuti)
Frau Sergescu
Severi, Prof., Francesco (Roma)
Sierpinski, Prof., Waclaw (Warschau)
Silverman, Prof., Louis (Dortmouth)
Herr Silverman
Simon, Prof., Webster G. (Cleveland)
Frau Simon
Simons, Prof., Lao G. (New York)
Miss Aurelia B. Simons
Skewes, Prof., S. (Capetown)
Frau Skewes
Slobin, Prof., Hermon L. (Durham)
Frau Slobin
Smith, Prof., David Eugene (New York)
Miss A. M. Jewett
Miss Helen Jewett
Smith, Herr, J. J. (Schenectady)
Smith, Prof., Paul A. (New York)
Snyder, Prof., Virgil (Ithaca)
Frau Snyder
Solomon, Dr., J. (Paris)
Spaltenstein, dipl. math., A. (Effretikon)
Speiser, Prof., A. (Zürich)
Frau Speiser
Spiess, Prof., Otto (Basel)
Stachó, Dr., Tibor von (Budapest)
Frau Gisella von Stachó
Frau Maria von Stachó
Staehelin, Dr., Helene (Basel)
Stanley, Frl., G. K. (London)
Frl. Stanley
Stark, Prof., Marion E. (Wellesley)
Steggall, Prof., J. E. A. (Dundee)
Steinbach, Dr., G. (Bonn a. Rh.)
Stenzel, Prof., Julius (Kiel)
Sternberg, Prof., Wolfgang (Breslau)
Stodola, Prof., A. (Zürich)
Stohler, Dr., H. (Basel)
Stoll, Dr., A. (Zürich)
Stoll, Dr., H. (Zürich)
Frau Stoll
Stone, Prof., Marshall, H. (New Haven)
Frau Stone
Störmer, Prof., C. (Oslo)
Frau Störmer
Frau Lövenskiold
Stouffer, Prof., Ellis B. (Lawrence)
Frau Stouffer

Straneo, Herr, Paolo (Genua)
Straszewicz, Prof., Stefan (Warschau)
Strazzeri, Prof., Vittorio (Palermo)
Streuli, Dr., Regierungsrat, A. (Zürich)
Strubecker, Dr., Karl (Wien)
Sudan, Dr., Gabriel (Göttingen)
Sulzer, Dr., Nationalrat, C. (Winterthur)
Frau Sulzer
Synge, Prof., J. L. (Toronto)
Syz, Herr, John (Zürich)
Frau Syz
Szász, Prof., Otto (Frankfurt a. M.)
Szász, Dr., Paul v. (Budapest)
Takagi, Prof., Teiji (Tokio)
Tamarkin, Prof., J. D. (Providence)
Tambs Lyche, Prof., Ralph (Trondheim)
Taussky, Dr., Olga (Wien)
Terradas, Prof. (Madrid)
Thiry, Prof., René (Strasbourg)
Thomsen, Prof., G. (Rostock)
Threlfall, Dr., W. (Dresden)
Thullen, Dr., Peter (Münster i. W.)
Tiercy, Prof., Georges (Genf)
Tietze, Prof., H. (München)
Timms, Dr., Geoffrey (St. Andrews)
Timoshenko, Prof., Stephen (Ann Arbor)
Frau Timoshenko
Tobler, Herr, Aug. L. (Zürich)
Frau Tobler
Togliatti, Prof., E. G. (Genua)
Toja, Prof., Guido (Castello)
Tonelli, Prof., Leonida (Pisa)
Frau Tonelli
Tonolo, Prof., Angelo (Padua)
Toran, Prof., Alphonse (Madrid)
Torroja, Prof., Antonio (Barcelona)
Torroja, Ingénieur, José (Madrid)
Tortorici, Prof., Pietro (Palermo)
Traynard, Prof., Emile (Marseille)
Frau Traynard
Trefftz, Prof., E. (Dresden A)
Tricomi, Prof., Francesco (Torino)
Frau Tricomi
Tripier, Ingénieur, Henri (Paris)
Trost, Herr, Ernst (Zürich)
Tschakaloff, Prof., Ljubomir (Sofia)
Tschebotaröw, Prof., N. (Kasan)
Tucker, Dr., Albert W. (Toronto)
Türler, Direktor, K. (Zürich)
Frau Türler
Turnbull, Prof., H. W. (St. Andrews)
Frau Turnbull
Herr D. G. Turnbull
Turner, Prof., Dr., J. S. (Iowa, U. S. A.)
Tyler, Prof., Harry W. (Washington)
Frau Tyler
Tzitzéica, Prof., G. (Bukarest)
Frau Tzitzéica
Frl. Tzitzéica
Ulam, Dr., St. (Lwów)
Ullrich, Dr., E. (Marburg a. d. Lahn)
Valiron, Prof., G. (Paris)
de la Vallée Poussin, Prof., Ch. (Louvain)
Vaulot, Dr., Emile (Paris)
Veblen, Prof., Oswald (Princeton)
Frau Veblen
Vetter, Prof., Quido (Prag)
Villiger, Dr., R. (Zug)
Vincensini, Prof., Paul (Bastia)
Viola, Dr., Tullio (Bologna)
Völlm, Dr., E. (Zürich)
Frau Völlm
Voellmy, Dr., Erwin (Basel)
Vojtech, Dr., Jan (Prag)
Volk, Prof., Otto (Würzburg)
Volterra, Dr., E. (Roma)
Volterra, Prof., Vito (Roma)
Vries, Prof., Jan de (Utrecht)
Van der Waerden, Prof., B. L. (Leipzig)
Waldmeier, Herr, M. (Aarau)
Walker, Prof., Helen M. (Iowa)
Prof. Ida Jewett
Walsh, Prof., Jos. L. (Cambridge, U.S.A.)
Watson, Prof., George Neville (Birmingh.)
Wavre, Prof., Rolin (Genève)
Weber, Prof., C. (Dresden)
Weeks, Prof., Dorothy (Chambersburg, U. S. A.)
Weil, Dr., A. (Paris)
Weinstein, Dr., Alexander (Breslau)
Frau Weinstein
Weiss, Prof., E. A. (Bonn a. Rh.)
Frau Weiss

Weitzenböck, Prof., Roland (Amsterdam)
Wettstein, Dr., Ständerat, O. (Zürich)
Frau Wettstein
Weyl, Prof., Hermann (Göttingen)
Frau Weyl
Weyrich, Prof., Rud. (Brünn)
White, Herr, F. P. (Cambridge)
Whitehead, Dr., Henry (Oxford)
Widder, Dr., David V. (Cambridge, U.S.A.)
Widmer, Dr., Adolf (St. Gallen)
Wiener, Prof., Norbert (Cambridge, U.S.A.)
Frau Wiener
Wilkosz, Prof., Witold (Kraków)
Wilks, Dr., Samuel S. (London)
Willers, Prof., F. A. (Freiberg i. Sa.)
Williams, Prof., Frank B. (Worcester)
Frl. Williams
Winn, Prof., C. E. (London)
Wirtinger, Prof., (Wien)
Wolff, Dr., Georg (Hannover)
Wolff, Prof., Julius (Utrecht)
Frau Wolff
Wrinch, Dr., Dorothy (Oxford)
v. Wyss, Dr., Walter (Zürich)
Frau v. Wyss
Young, Frl., R. C. H. (Cambridge)
Herr L. Ch. Young
Young, Prof., W. H. (Lausanne)
Zahra, Prof., Mustapha Abu (Kairo)
Herr M. Shichini (Kairo)
Zaremba, Prof., Stanislas (Kraków)
Zervos, Prof., P. (Athen)
Zoretti, Prof., L. (Caen)
Züllig, Dr., J. (Küsnacht)
Zygmund, Prof., A. (Wilno)
Frau Zygmund

Verteilung der Kongressmitglieder auf die Staaten

	Teilnehmer	Begleiter
Ägypten	5	2
Afrika	2	1
Belgien	7	1
Bulgarien	3	1
Canada	2	—
China	3	3
Dänemark	6	2
Deutschland	118	24
England	37	12
Finnland	3	—
Frankreich	69	20
Griechenland	5	—
Holland	16	1
Japan	3	1
Indien	2	—
Irland	4	2
Italien	64	17
Jugoslavien	4	—
Übertrag	353	87

	Teilnehmer	Begleiter
Übertrag	353	87
Lettland	1	1
Mexiko	1	—
Norwegen	9	5
Österreich	10	—
Palästina	2	—
Persien	1	—
Polen	20	2
Portugal	2	1
Rumänien	7	5
Russland	10	2
Schweden	5	2
Schweiz	144	41
Spanien	10	—
Tschechoslowakei	12	1
Türkei	2	—
Ungarn	12	3
U. S. A.	66	36
Total	667	186

Präsidentenliste der Sitzungen

Präsidenten der allgemeinen Sitzungen

Montag,	5. Sept. 1932.	Vortrag Fueter: *D. Hilbert.* Der Kongress ehrt ihn, indem die Anwesenden sich von ihren Sitzen erheben.
Dienstag,	6. Sept. 1932.	Vorträge C. Carathéodory, G. Julia und N. Tschebotaröw: *S. Pincherle.*
		Vorträge W. Pauli und T. Carleman: *P. Alexandroff.*
Mittwoch,	7. Sept. 1932.	Vorträge E. Cartan, L. Bieberbach und E. Noether: *T. Takagi.*
		Vorträge M. Morse und H. Bohr: *W. H. Young.*
Freitag,	9. Sept. 1932.	Vorträge F. Severi, R. Nevanlinna und J. W. Alexander: *J. Hadamard.*
		Vorträge R. Wavre und F. Riesz: *Ch. de la Vallée-Poussin.*
Samstag,	10. Sept. 1932.	Vorträge G. Valiron und S. Bernstein (Hostinský): *O. Veblen.*
		Vorträge W. Sierpiński und K. Menger: *A. Guldberg.*
Montag,	12. Sept. 1932.	Vortrag J. Stenzel: *R. Fueter.*

Präsidenten der Sektionssitzungen

Sektion	Montag, 5. Sept. 1932	Mittwoch, 7. Sept. 1932	Freitag, 9. Sept. 1932	Samstag, 10. Sept. 1932
I	Landau	Mordell	Scorza	Blichfeldt
IIa	Forsyth	Milloux Bohr	Weyl	Cerf
IIb	Fejer	M. Riesz	Kampé de Fériet	Wiener Doetsch
IIc	Tonelli	Hille	Hahn	Watson
IIIa	Godeaux	Bompiani	Tzitzéica Mentré	Schouten
IIIb	Togliatti	Brouwer	Nielsen	v. Kerékjártó
IV	Risser	Insolera	Riebesell	—
V	Pöschl	Lichtenstein	—	—
VIa	d'Adhémar	Levi-Cività	v. Mises	Buhl
VIb	Störmer	Hostinský	Boulad bey	Drumeaux
VII	Archibald	Fraenkel	Reymond	—
VIII	Lietzmann	Smith	Smith Hadamard	—

Protokoll der Eröffnungssitzung

im Auditorium maximum der Eidg. Technischen Hochschule

Montag, den 5. September, 9 Uhr

Herr Prof. *Fueter* eröffnet den Kongress als Präsident des Organisationskomitees mit folgender Ansprache:

Meine Damen und Herren!

Ich habe die grosse Ehre, Sie im Namen der Schweizerischen Mathematiker in Zürich aufs herzlichste willkommen zu heissen. Etwa 700 Mathematiker und Mathematikerinnen aus 41 verschiedenen Ländern haben unserer Einladung Folge geleistet, und wir hoffen zuversichtlich, dass Sie sich in unserer Stadt wohl fühlen und den Kongress mit reichem Gewinne verlassen werden. Trotz der Schwere der Zeit ist es uns gelungen, den Kongress dank der finanziellen Unterstützung von Bund, Kanton und Stadt Zürich, sowie der Grossbanken und Industrien Zürichs in einfacher, aber würdiger Weise zu organisieren. Wir glauben, damit unserer heissgeliebten Wissenschaft einen Dienst erwiesen zu haben, der Wissenschaft, die heute ein unsichtbares Band der Zusammengehörigkeit und der gleichen Interessen um uns schliesst. Möge sie in diesen Tagen durch unsere persönlichen Aussprachen und unsere allgemeinen Beratungen gefördert werden.

Mesdames, Messieurs,

J'ai l'honneur de vous souhaiter au nom des mathématiciens suisses la bienvenue la plus chaleureuse. Environ 700 mathématiciens et mathématiciennes de 41 différents pays ont obéis à notre appel, et nous espérons sincèrement qu'ils se trouveront à leur aise dans notre bonne ville de Zurich, et qu'ils nous quitterons après le congrès avec le sentiment d'avoir augmenté leur savoir. Malgré la crise actuelle nous avons réussi d'organiser le congrès d'une manière simple mais digne, grâce à l'aide financière de la Confédération, du Canton et de la Ville de Zurich, ainsi que des grandes banques et des industries zurichoises. Nous croyons d'avoir rendu service à notre science bien-aimée; cette science est aujourd'hui le lien invisible qui nous inspire le sentiment d'appartenir à une même grande famille et d'avoir les mêmes intérêts. Nous souhaitons que la science progressera pendant ces jours par nos contacts personnels et par nos délibérations.

Ladies and gentlemen,

I have the great honour to bid you a hearty welcome in the name of the Swiss mathematicians. Almost 700 mathematicians of both sex from 41 different countries have accepted our invitation and we hope, that they will feel at home in our town and that the congress will be a success in every direction. In spite of the economic crise we have succeeded in organising the congress in a simple but dignified manner owing to the support of the Swiss government, of the cantonal and municipal authorities of Zurich, and of the different financial and industrials concerns of our town. In this way we trust to have rendered a service to our highly beloved science who will be during the congress-days the uniting element of all our thoughts and interests. We hope that the mathematical science will be greatly developped in these days by the mutual exchange of knowledge and the general researches.

Meine Damen und Herren!

Schon einmal hat der Internationale Mathematikerkongress in Zürich getagt. Im Jahre 1897 fand unter dem Präsidium von Professor Geiser, den wir die Freude haben, unter uns zu begrüssen, die erste internationale Zusammenkunft der Mathematiker statt. Wir schätzen uns glücklich, dass Professor Geiser trotz seiner fast neunzig Jahren es sich nicht nehmen liess, am heutigen Tage unter uns zu sein. Auch sonst haben wir die Ehre, führende Mathematiker des Auslandes zu sehen, die bereits im Jahre 1897 hier mitwirkten. Aus der grossen Zahl möchte ich nur den hochverdienten Präsidenten des unvergesslichen Kongresses in Bologna, Professor *Salvatore Pincherle*, den illustren Mathematiker Belgiens *de la Vallée-Poussin*, den grossen französischen Mathematiker *Emile Borel*, den Altmeister *Alfred Pringsheim* aus München und den Vertreter Polens *Dickstein* nennen. Alle diese Kollegen werden konstatieren können, dass auch die Entwicklung der Organisation unserer Kongresse nicht stehen geblieben ist. Nirgends so sehr wie in wissenschaftlichen Bestrebungen bedeutet ein Stehenbleiben Verknöcherung und Tod. So haben sich auch fast alle Zahlen im Vergleich mit 1897 mehr als verdoppelt. Statt 4 Tage dauert der Kongress deren 9; statt 2000 haben wir mehr als 6000 Einladungen versandt; statt 240 haben wir heute 800 Teilnehmer, statt 5 Sektionen sind es 8 und statt in zwei Sprachen verhandeln wir in 4. Nur der Preis der Kongresskarte ist kaum verändert: Fr. 30.— statt Fr. 25.—, während die Damenkarte beidemal Fr. 15.— beträgt.

Im Jahre 1897 stand weder die Eidgenössische Technische Hochschule in der heutigen Form, noch das Universitätsgebäude. Die E.T.H. hat schon damals in ihrem alten Teile den Kongress beherbergt. Dieser schöne Saal war aber noch nicht errichtet. Wir danken dem Eidgenössischen Schulrat, und insbesondere seinem hochgeehrten Präsidenten, Professor *Rohn*, für die Überlassung der Räumlichkeiten im nun vollendeten neuen Bau. Ebenso danken wir dem Rektor der Universität, dem eminenten Staatsrechtslehrer *Fritz Fleiner*, dass er uns die Säle der Universität Zürich für die Nachmittage zur Verfügung stellte.

Weltgeschichtliche Ereignisse haben sich in den 35 Jahren seit dem ersten Kongress abgespielt. Aber der Sinn und Zweck derselben ist der gleiche geblieben. Der unvergessene *Hurwitz* hat ihn 1897 in vortrefflichster Weise charakterisiert, und *de la Vallée-Poussin* hat in Toronto hervorgehoben,wie Hurwitz'Worte immer noch gelten. Der Kongress soll in erster Linie der persönlichen Aussprache, dem persönlichen Sichkennen- und Verstehenlernen dienen. Dieser persönliche Kontakt baut sich auf der allen Mathematikern gemeinsamen Liebe zur Wahrheit und zur wissenschaftlichen Erkenntnis auf. Kein Unterschied der Rasse oder der sozialen Schichtung kann verhindern, dass der Mathematiker voll und ganz, ja mit Leidenschaft jedem neuen fruchtbaren Gedanken zujubelt und ihn anerkennt. In dieser Hinsicht ist unsere Wissenschaft eminent humanitär, und damit klassen- und völkerverbindend. Der Mathematiker gibt sich der Freude, mit Kollegen über seine wissenschaftlichen Ideen zu sprechen, mit Enthusiasmus hin; er gibt und empfängt dadurch die unentbehrliche Anregung.

So möge auch unser heutiger Zürcher Kongress diesem Zwecke dienen, und damit die Mathematik fördern, jene Wissenschaft, der wir alle unsere Lebensarbeit widmen.

Hierauf überbringt Herr Regierungspräsident Dr. *Adolf Streuli* als Vertreter der Regierung des Kantons Zürich den Gruss der Regierung und der Bevölkerung des Kantons in folgenden Worten:

Hochgeehrte Versammlung!

Zürich erlebt die hohe Ehre, in diesen Tagen den Internationalen Mathematikerkongress empfangen und aufnehmen zu dürfen.

Mit grosser Freude nehme ich an dieser, seiner Eröffnungssitzung teil, denn ich habe einer mich besonders ansprechenden Aufgabe zu genügen: im Namen der Landesbehörde, des Regierungsrates des Kantons Zürich, entbiete ich Ihrem Kongresse und Ihnen allen persönlich herzlichen Willkommensgruss und bekunde unsere freudige Genugtuung, dass Sie für Ihre Veranstaltung diesen Platz gewählt haben, denn wir sind empfänglich für alles Freundliche und Anerkennende, das unserm Zürich zugedacht ist, und bestrebt, es dankbar zu vergelten. – Besonders begrüsse ich noch die verehrten Damen, die Abordnungen und Gäste.

Sie haben, wie sich aus Ihren Kongressakten ergibt, in diesen Tagen ein grosses Arbeitsprogramm zu bewältigen. Wird das für Sie eine starke Beanspruchung bedeuten, so liegt darin auch eine ernste Rechtfertigung Ihrer Tagung und Ihres Zusammenarbeitens. Und in diesen Zeiten, die so vielfach die Merkmale widersinnigen Auseinanderstrebens aufweisen, ist planmässiges Schaffen, internationales Zusammengehen im Dienste der Kultur besonders hoch zu bewerten und verdient öffentliche Förderung und dankbare Anerkennung.

Ich darf wohl zu Ihrer Orientierung darauf hinweisen, dass die Stadt Zürich der Sitz zweier Hochschulen ist, der Eidgenössischen Technischen Hochschule, zu der dieses Auditorium maximum gehört, und der kantonalen Universität.

Es ist einfach, sich das Alter dieser beiden Institute zu merken: die E.T.H. feierte vor zwei Jahren das Jubiläum ihres 75jährigen Bestehens, und die kantonale Hochschule wird nächstes Jahr ihr erstes Jahrhundert vollenden. Aus einfachen Organisationen heraus haben sich die beiden Anstalten fortentwickelt. Im Gebäude der E.T.H. war bis 1914 auch die kantonale Universität untergebracht. Heute steht dieses Gebäude stark vergrössert und erweitert da und dient ausschliesslich der E.T.H. Es ist umgeben von einer Reihe von Zusatzanstalten und Laboratorien, wie auch der Arbeitsplan der E.T.H., die bis 1909 „Eidgenössisches Polytechnikum" hiess, zur fachwissenschaftlichen Lehre in grossem Umfange die Untersuchung und Forschung, das Demonstrieren und die Tätigkeit im Laboratorium hinzugefügt hat.

Im letzten Vierteljahrhundert sind auf Grund der reglementarisch absolvierten Kurse über 5000 Diplome erteilt worden (als Architekten, Bauingenieure, Maschineningenieure, Elektroingenieure, Ingenieur-Chemiker, Kultur-, Forst- und Agrikultur-Ingenieure, und an Fachlehrer für Mathematik, Physik und Naturwissenschaften).

Die Zahl der Doktordiplome, die von der E.T.H. erteilt wurden – 1909 wurden sie eingeführt – übersteigt 700.

In den Kursen sind als Lehrer tätig: 75 Professoren, 42 Hilfslehrer und Inhaber von besondern Lehraufträgen, und überdies 51 Privatdozenten, und die Zahl der Schüler beläuft sich auf gegen 2000.

Der Bund, dessen unmittelbarer Hoheit die E.T.H. unterstellt ist und dem der besondere schweizerische Schulrat als Bindeglied dient, verausgabt für dieses Bundesinstitut jährlich ca. 4 Millionen Franken.

Die kantonale Hochschule, die seit 1914 einen eigenen neuen Monumentalbau in der Nachbarschaft besitzt, umfasst sechs Fakultäten (theologische, juristische, medizinische, veterinär-medizinische und zwei philosophische). Auch sie ist umgeben von einer Reihe von Sonderanstalten, Laboratorien, Kliniken, Sammlungen und Museen.

Die Zahl der Lehrkräfte beträgt: Professoren der verschiedenen Kategorien 103, Privatdozenten und Lehraufträge auch 103.

Immatrikulierte Studenten sind es gegen 2000, davon ungefähr vier Fünftel Schweizer und ein Fünftel Ausländer.

Der Betrieb der Hochschule und ihrer Institute erfordert alljährlich aus der kantonalen Staatskasse ungefähr 3 Millionen Franken.

Im Vorlesungsplane der kantonalen Hochschule figurieren auch einzelne mathematische Fächer.

Womit ich Ihnen sagen wollte, dass das von Ihnen vertretene Fach, das ich mit Rücksicht auf die Eigenart der Anforderungen, die es an seinen Jünger stellt, nicht nur eine Wissenschaft, sondern auch eine, besondere Begabung voraussetzende, *Kunst* nennen möchte, auf unserm Platze in Lehre, Forschung und Praxis vertreten ist und planmässig gehütet und gefördert wird.

Der Sprechende gehört nicht zu diesen wissenschaftlichen Künstlern, obwohl er als Verwalter der kantonalen Finanzen schicksalsmässig auch viel mit Zahlen zu schaffen hat. Da kommt er mit einfachen Operationen aus, ohne Algebra und Logarithmen, und die Schwierigkeit ist für ihn das Hereinbringen der durch die Staatsaufgabe bedingten Gelder und ihre angemessene und gerechtfertigte Wiederausgabe.

Aber der Umgang eines Finanzdirektors mit Zahlen und Grössen begründet doch eine nähere und ihn ansprechende Beziehung zum Mathematiker, der seinen Stammbaum in die ältesten Kulturen zurückführt, wo es freilich noch keine Staatsrechnungen gab, und der die Grössten ihrer Geschichte zu den Vorfahren einreiht.

Dem Mathematiker – so stelle ich mir vor – eignet, wie schon angedeutet, eine Begabung eigener Art. Und diese verleiht ihm auch Bedeutung und Gehalt eines von besonderer Berufung getragenen Künstlers.

Der Mathematiker hat den Vorzug, in seinen Zahlen und Zeichen über graphische Ausdrucksmittel zu verfügen, die universell verstanden werden und keiner Übertragung in andere Sprachen bedürfen, und da nähert sich die Mathematik ja jener Kunst, deren Zeichen, die Notenschrift, auch universell akzeptiertes Verständigungsmittel sind und keine Übersetzung erheischen, der Musik.

So kommt unwillkürlich eine begriffliche Verbindung zustande, bei der man, auch unter den schwersten mathematischen Problemen etwas wie angenehme, erleichternde Musik hindurchhört.

Solche vom hohen Gut der Töne und Melodien getragene Stimmung möchte ich Ihnen wünschen für Ihre Zürcher Tage!

Seien Sie herzlich willkommen; und viel Freundliches bei Ihrer Arbeit und bei Ihrem ganzen Zürcher Programm!

Nach dem Antrag von Herrn Prof. S. Pincherle wird Herr Prof. *R. Fueter* als *Präsident* des Kongresses durch Akklamation gewählt.

Herr Fueter dankt für die erwiesene Ehre. Nach seinem Vorschlag wird das Kongresskomitee in folgender Weise konstituiert: *Vizepräsidenten* des Kongresses sind die Herren *A. Guldberg, J. Hadamard, D. Hilbert, N. M. Kryloff, S. Pincherle, T. Takagi, Ch. de la Vallée-Poussin, O. Veblen, W. Wirtinger, W. H. Young, S. Zaremba.*

Als Sekretäre werden ernannt die Herren *F. Gonseth* und *A. Speiser.*

Der Präsident teilt mit, dass der *Ehrenvorsitzende*, Herr Bundespräsident *Motta*, der leider an der Teilnahme verhindert ist, dem Kongress herzliche Grüsse und Wünsche sendet. Folgendes Telegramm wird an ihn abgesandt:

Der Internationale Mathematikerkongress in Zürich entbietet seinem hochverehrten Ehrenpräsident, Herrn Bundespräsident Motta, den Ausdruck der grössten Wertschätzung und Ergebenheit. Der Präsident: *Rud. Fueter.*

Anlässlich des ersten Kongresses, der 1897 in Zürich abgehalten wurde, ging an den wegen Altersbeschwerden abwesenden Charles Hermite ein Sympathietelegramm. An dessen Schwiegersohn, Herrn Prof. *Emile Picard*, der aus gleicher Veranlassung dem Kongress ferngeblieben ist, wird folgendes Telegramm abgeschickt:

Les membres du congrès international des mathématiciens prient l'illustre doyen des maîtres de l'analyse de notre époque d'agréer l'hommage de leur admiration et de leur profond respect.

Le président: *Rud. Fueter.*

Der Präsident verliest ein Glückwunschtelegramm, das die Sommertagung der *Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft* in Los Angeles dem Kongresse sendet.

Hierauf macht der Präsident Mitteilung von dem Anerbieten des kürzlich verstorbenen Prof. *Fields*, eine goldene Medaille zu stiften für junge Mathematiker. Herr Prof. *J. L. Synge* aus Toronto macht als Bevollmächtigter nähere Mitteilungen. Die Stiftung soll vom Kongresskomitee begutachtet werden. Letzteres wird an der Schlussitzung dem Kongress Antrag zur Beschlussfassung stellen.

Herr Prof. *Plancherel*, Rektor der E.T.H. und Vizepräsident des Organisationskomitees teilt mit, dass die Bibliothek der Eidg. Technischen Hochschule den Mitgliedern des Kongresses zur Verfügung steht und gibt zur Kenntnis, dass Herr Prof. *G. H. Hardy* seinen Vortrag nicht halten wird, dass ferner der Vortrag des an der Teilnahme verhinderten Prof. *S. Bernstein* durch Herrn Prof. *B. Hostinský* verlesen werden wird. Jeder Teilnehmer erhält einen *Festband der Commentarii Mathematici Helvetici* als Geschenk der schweizerischen Mathematiker.

Herr Prof. *Hopf* macht einige ergänzende Mitteilungen zur Traktandenliste der Sektionssitzungen, und Herr Prof. *Speiser* unterbreitet dem Kongress die Vorschläge für die Präsidenten der am Montagnachmittag stattfindenden Sektionssitzungen. Letztere werden durch Akklamation angenommen.

Der Sekretär: *A. Speiser.*

Protokolle der Sektionssitzungen

Verzeichnis der Sektionen

I	Algebra und Zahlentheorie.
IIa, IIb, IIc	Analysis.
IIIa, IIIb	Geometrie.
IV	Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und Statistik.
V	Mathematisch-technische Wissenschaften und Astronomie.
VIa, VIb	Mechanik und Mathematische Physik.
VII	Philosophie und Geschichte.
VIII	Pädagogik.

Montag, 5. September, 15 Uhr

Sektion I

Präsident: *Landau* — Sekretär: *Züllig*

Mordell, Manchester.	On the number of solutions of some congruences in two variables and the Riemann hypothesis.
Deuring, Leipzig.	Imaginäre quadratische Zahlkörper und die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion.
Nagell, Uppsala.	Über die Lösbarkeit der Gleichung $x^2-Dy^2=-1$.
Mahler, Krefeld.	Über die Darstellung von Zahlen durch Binärformen höheren Grades.
Bays et Belhôte, Fribourg.	Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner diff. pour N premier de la forme $6n+1$.
Rafael, Bombay.	On saturated numbers.
Brandt, Halle a. S.	Die Diskriminante einer quadratischen Form.

Sektion IIa

Präsident: *Forsyth* — Sekretär: *Locher*

Cauer, Göttingen.	Über Funktionen mit positivem Realteil.
Viola, Bologna.	Sui punti irregolari di una famiglia non normale di funzioni olomorfi.
Zygmund, Wilno.	Sur un théorème de M. Pólya.

Petrovitch, Belgrade.	Remarques sur les équations différentielles des fonctions elliptiques.
Hornich, Wien.	Integrale erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen.
Maier, Frankfurt.	Über die Riemannsche Q-Funktion.

Sektion IIb

Präsident: *Fejer* Sekretär: *Krakowski*

Tricomi, Torino.	Periodische Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung.
Rellich, Hamburg.	Über die erste Randwertaufgabe bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus.
Cerf, Strasbourg.	Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du seconde ordre à trois variables indépendentes.
Cahen, Paris.	Sur l'intégration et la solution singulière des équations différentielles linéaires par rapport à la fonction et la variable.
Devisme, Le Havre.	Quelques remarques relatives à une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre.

Am Schlusse dieser Sitzung äusserte Herr *Buhl* den Wunsch, in Vertretung von Herrn *Pfeifer*, Kieff, in der folgenden Sitzung einige Bemerkungen über dessen Untersuchungen betreffend partielle Differentialgleichungen zu machen.

Sektion IIc

Präsident: *Tonelli* Sekretär: *Rotach*

Lusin, Moskau.	Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques. (Vorgelegt von *Sierpiński*.)
Kuratowski, Lwów.	Sur la mesurabilité des ensembles définissables.
Ulam, Lwów.	Zum Massbegriff in Produkträumen.
Piccard, Neuchâtel.	Quelques propriétés d'un groupe d'ensembles parfaits et leur application à l'étude de la fonction m $\{E(\vartheta)\}$ de M. D. Mirimanoff.
Moore, Cincinnati.	On certain properties of the Fourier constants of L integrable functions of two variables.
Adams and Clarkson, Providence.	On definitions of bounded variation for functions of two variables. (Vorgelegt von *Adams*.)

Laboccetta, Roma.	Riducione a tipi normali ed effettiva integrazione delle funzioni discontinue.
Bary, Moskau.	Sur les superpositions de fonctions continues à variation bornée. (Vorgelegt von *Saks.*)

Sektion IIIa

Präsident: *Godeaux* — Sekretär: *Hess*

Hamburger, Köln.	Ribaucourtransformation und sphärische Abbildung.
Severi, Roma.	Nuovi orizzonti della geometria sopra una superficie algebriche.
Hollcroft, New York.	The general web of surfaces and the space involution defined by it.
Mühlendyck, Berlin.	Über die regulären Somenkongruenzen.
Snyder, Ithaka.	On a series of Cremona involutions defined by a pencil of ruled surfaces.
Krebs, Berne.	Sur la déformation des surfaces.

Sektion IIIb

Präsident: *Togliatti* — Sekretärin: *Ganguillet*

Golab, Krakau.	Über die Möglichkeit einer absoluten Auszeichnung der Gruppe von Koordinatensystemen in verschiedenen Geometrien.
Thomsen, Rostock.	Über die Behandlung der Geometrie mit einem Gruppenkalkül.
Alt, Wien.	Eine Axiomatik der elementargeometrischen Verknüpfungsbeziehungen.
Weiss, Bonn.	Über eine Konfiguration desmischer Vierecke.
Cummings, New York.	On a method of comparison for straight line nets.
Mimura, Tokio.	Über die Bogenlänge.

Sektion IV

Präsident: *Risser* — Sekretär: *Gölz*

Amoroso, Roma.	Curve di frequenza nelle assicurazioni di infortuni e di responsabilità civile. (30 Min.)
Riebesell, Hamburg.	Was folgt aus dem Misesschen Wahrscheinlichkeitsbegriff für die Versicherungsmathematik?
Moser, Bern.	Entkrankungskraft und Besselsche Funktionen.

Ivanoff, Sofia. Les problèmes mathématiques dans l'assurance sur la vie et les problèmes financiers.

Insolera, Torino. Sopra nuove funzioni di sopravvivenza di varii ordini, nel senso di Quiquet.

Sektion V

Präsident: *Pöschl* — Sekretär: *Boller*

Volterra, Roma. Elasticità libera ed elasticità vincolata. Applicazioni del concetto di elasticità vincolata.

Schmid, Koethen. Zur Statistik und Dynamik elastischer Platten.

Synge, Toronto. The equilibrium of a tooth with a general conical root.

Lotz, Göttingen. Neuere Probleme der Tragflügeltheorie.

Cauer, Göttingen. Zur Theorie der Wechselstromschaltungen.

Sektion VIa

Präsident: *d'Adhémar* — Sekretär: *Lüssy*

Schieldrop, Oslo. Begründung der Dynamik ohne virtuelle Verschiebungen.

Bilimowitch, Belgrade. Sur une forme nouvelle des équations différentielles du mouvement d'un système matériel arbitraire. Applications.

Giorgi, Roma. Sul postulato fondamentale della statica.

Casazza, Milano. Les théories de la mécanique à la lumière de la critique.

Sektion VIb

Präsident: *Störmer.* — Sekretär: *Aeppli*

Rainich, Michigan. Determination of matter and force components from the Riemann tensor.

Van Dantzig, Delft. Projektiver Zusammenhang mit Fundamentalquadrik.

Schouten, Delft. Verwendung eines projektiven Zusammenhanges mit Fundamentalquadrik zur Bildung einer generellen Feldtheorie.

Juvet, Lausanne. Les nombres hypercomplexes de Clifford.

Sektion VII

Präsident: *Archibald.* — Sekretär: *Axer*

Gandz, New York. On alphabetical numerals. (Vorgelegt von *E. Smith*, New York.)

Vetter, Prag. Nicolas Kopernik et la Bohême.

Sektion VIII.

Präsident: *Lietzmann* Sekretär: *Brunner*

Carrus, Alger. Comment doit être compris dans les Facultés ou Grandes Ecoles l'enseignement des hautes mathématiques?

Establier, Paris. Rapport de l'Institut International de coopération intellectuelle concernant la coordination de l'économie scientifique internationale.

Mittwoch, 7. September, 15 Uhr

Sektion I

Präsident: *Mordell* Sekretär: *Züllig*

Kiepert, Hannover. Förderung der Untersuchungen des Herrn Fueter über Modulargleichungen und komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. (30 Min.)

Watson, Birmingham. Über die Schläflischen Modulargleichungen.

Gut, Zürich. Über die Primidealzerlegung in gewissen relativ-ikosaedrischen Zahlkörpern.

Du Pasquier, Neuchâtel. Sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques du second ordre.

Linfoot, Oxford. On a problem in the additive theory of numbers.

Sektion IIa

Präsident: *Milloux (Bohr)* Sekretär: *Locher*

Milloux, Strasbourg. Sur les bandes de détermination infinie des fonctions entières.

Hoessjer, Malmö. Über die Ordnung einer ganzen Funktion mit Parameter.

Ahlfors, Abo. Eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes.

Ullrich, Marburg. Beiträge zur Theorie der Wertverteilung.

Speiser, Zürich. Die independente Theorie gewisser Funktionsklassen.

Cartwright, Cambridge. On functions regular in the unit circle.

Petersson, Hamburg. Über die Entwicklungskoeffizienten einer gewissen Klasse automorpher Funktionen.

Raclis, Bukarest. a) Sur la série de Taylor généralisée.
b) Sur la convergence de certaines séries multiples.

Sektion IIb

Präsident: *M. Riesz* Sekretär: *Krakowski*

Hadamard, Paris. Sur les équations aux dérivées partielles réductibles.

Buhl, Toulouse.	Sur la formule de Stokes pour espaces à canaux. (30 Min.)

Im Anschluss an seinen Vortrag referiert Herr *Buhl* noch über die Ergebnisse des Herrn *Pfeiffer*, Kieff, betreffend die Differentialoperatoren, welche die Lösungen einer linearen Differentialgleichung permutieren.

Carrus, Alger.	Les systèmes incomplets d'équations différentielles aux dérivées partielles.
Smith, Schenectady.	An expression for Greens function in generalized coordinates. (Vorgelegt von *George.*)
Demtchenko, Paris.	Sur les problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique.
Wrinch, Oxford.	Harmonics associated with certain inverted spheroids.
Picone, Napoli.	Una nuova proprietà integrale delle soluzione dell'equazione del calore e sue applicazione.

Im Anschluss an den letzten Vortrag weisen *von Stachó* und *Doetsch* darauf hin, dass die hier vorgetragenen Ergebnisse im wesentlichen schon in den Arbeiten von *F. Bernstein* und *Doetsch* über die Wärmeleitung enthalten seien.

Sektion IIc

Präsident: *Hille* — Sekretär: *Rotach*

Neville, Reading.	Iterative Interpolation.
Wolff, Utrecht.	Beschränkte analytische Funktionen und Stieltjes-Integrale.
Bögel, Schulpforte.	Über eine neue Differentialrechnung für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher.

Sektion IIIa

Präsident: *Bompiani* — Sekretär: *Hess*

Delens, Le Havre.	Sur la géométrie conforme des congruences.
Mentré, Nancy.	La déformation projective du complexe linéaire.
Errera, Bruxelles.	Sur un problème de M. Bricard. (Vorgelegt von *Godeaux.*)
Godeaux, Liége.	Remarques sur les involutions appartenant à une surface algébrique.
Vincensini, Bastia.	Sur une transformation des congruences rectilignes.
Comessati, Padova.	Sulla connessione delle superficie algebriche.

Sektion IIIb

Präsident: *Brouwer* — Sekretärin: *Ganguillet*

Kaufmann, Heidelberg.	Über ebene Bereiche von unendlichem Zusammenhang.
Alexandroff, Moskau.	Dimensionstheorie. (40 Min.)
Hurewicz, Amsterdam.	Über stetige Abbildungen topologischer Räume.
Borsuk, Warschau.	Über die Zerlegung einer euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. (Vorgelegt von *Knaster*.)
Knaster, Warschau.	Über unikohärente Kontinua.

Sektion IV

Präsident: *Insolera* — Sekretär: *Gölz*

v. Mises, Berlin.	Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (40 Min.).
Pollaczek-Geiringer, Berlin.	Bemerkungen zur Korrelationstheorie.
Schulz, Berlin.	Über das Problem der Markoffschen Ketten.
Risser, Paris.	De la dispersion afférente à n erreurs dans le cas où chacune des erreurs composantes est régie par une loi simple. Essai d'une représentation analytique.
Quiquet, Paris.	Invalidités multiples. Deux problèmes mathématiques; essai de solution. (Vorgelegt von *Risser*.)

Sektion V

Präsident: *Lichtenstein* — Sekretär: *Boller*

Tiercy, Genève	Sur la répartition des vitesses des corps cométaires lointains.
Dive, Clermont-Ferrand.	Rotations permanentes dans un astre fluide hétérogène en anneau.

Sektion VIa

Präsident: *Levi-Cività* — Sekretär: *Jungen*

D'Adhémar, Lambersart.	Le mouvement gyroscopique des projectiles stables.
Popoff, Sofia.	Das Hauptproblem der äusseren Ballistik im Lichte der modernen Mathematik.
Glenn, Landsdowne.	The mecanics of the stability of a central orbit.
Husson, Nancy.	Les apparences de discontinuité ou d'irrégularité en dynamique.
Schlichting, Göttingen.	Über die Stabilität der Couette-Strömung.

Sektion VIb

Präsident: *Hostinský* — Sekretär: *Aeppli*

Korn, Berlin.	Mechanisierung der Wellenmechanik und der Quantentheorie. (30 Min.)
Tonolo, Padova.	Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell-Hertz che regolano i fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici.
Fjeldstad, Bergen.	Wärmeleitung im Meere.
Stoermer, Oslo.	Neue numerische Bahnberechnungen eines Elektrons im Felde eines Dipols (mit Lichtbildern).
Conway, Dublin.	The radiation of angular momentum.
Weyrich, Brünn.	Über einige Randwertprobleme.
Müller, Prag.	Laminare Ausbreitungserscheinungen in Flüssigkeiten (mit Lichtbildern).
Giorgi, Roma.	Progressi nel sistema definitiva di unità.

Sektion VII

Präsident: *Fraenkel* — Sekretär: *Axer*

Politzer, Budapest.	Rekursive Funktionen.
Kálmár, Szeged.	Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.
Foster, Göttingen.	On general Kronecker-(Integer)-synthesis of disciplines.
Duerr, Zürich.	Die Beziehung von Grund und Folge im Gebiete der elementaren Logik.

Sektion VIII

Präsident: *Smith* — Sekretär: *Brunner*

Sitzung der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission.

Smith, New York, Président.	Allocution.
Fehr, Secrétaire général et Trésorier, Genève.	Rapport sommaire.
Loria, Gênes.	La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. Rapport.
Hamel, Berlin.	Der gegenwärtige Zustand der Frage der Ausbildung der Mathematik-Lehrer in Deutschland.

Diskussion.

Freitag, 9. September, 15 Uhr

Sektion I

Präsident: *Scorza* — Sekretär: *Züllig*

Hasse, Marburg.	Strukturtheorie der halbeinfachen Algebren über algebraischen Zahlkörpern. (30 Min.)

Ore, New Haven.	Theory of non-commutative polynomials.
Krull, Erlangen.	Ideal- und Bewertungsbegriff in der Arithmetik der kommutativen Integritätsbereiche.
Berwald, Prag.	Elementare Sätze über die Nullstellen der Ableitungen eines Polynoms in bezug auf einen Punkt.
Sergescu, Cluj.	Quelques points de la théorie des équations algébriques.

Sektion IIa

Präsident: *Weyl* — Sekretär: *Locher*

E. Cartan, Paris.	Sur l'équivalence pseudo-conforme des hyper-surfaces de l'espace de deux variables complexes.
H. Cartan, Strasbourg.	Les transformations des domaines cerclés et des domaines analogues au moyen des fonctions analytiques de deux variables complexes.
Bergmann, Berlin.	Zur Funktionentheorie zweier komplexer Veränderlichen.
Kolman, Moskau.	Funktionen quaternionaler Veränderlichen.

Sektion IIb

Präsident: *Kampé de Fériet* — Sekretär: *Krakowski*

Le Roux, Rennes.	Les groupes de transformations et la théorie de la relativité.
Wiener and Paley, Cambridge (Mass.).	Analytic properties of characters of infinite Abelian groups. (Vorgelegt von *Wiener.*)
Delsarte, Nancy.	Le groupe de transformations conformes dans l'espace de Hilbert.
Des Lauriers, Kain.	Sur les systèmes différentiels du second ordre qui admettent un groupe continu fini de transformations.
Marchaud, Marseille.	Unicité des intégrales d'un système d'équations différentielles.
Wilkosz, Cracovie.	a) La propriété de Darboux du Jacobien généralisé. b) Sur le théoréme fondamental de la théorie des déformations continues.
Biernacki, Poznań.	Sur l'équation différentielle $y'' + q(x)\,y = o$.

Sektion IIc

Präsident: *Hahn* — Sekretär: *Rotach*

Hardy and Littlewood, Cambridge.	Some new convergence criteria for Fourier series. (Vorgelegt von *Hardy.*)

Hille, *Princeton and Tamarkin*, *Providence.*	The summation of Fourier series by Hausdorff means. (Vorgelegt von *Hille.*)
Hille, *Princeton and Tamarkin*, *Providence.*	On the summability of Fourier series. (Vorgelegt von *Tamarkin.*)
Winn, *London.*	On the oscillation of the means of Riesz and Cesàro of the first order.
Jessen, *Kopenhagen.*	Eine Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderlichen, mit Anwendungen auf das Wertverteilungsproblem für fast periodische Funktionen, insbesondere für die Riemannsche ζ-Funktion.
Dusl, *Prag.*	Quelques remarques sur les polynômes généralisés de Laguerre.

Sektion IIIa

Präsident: *Tzitzéica (Mentré)* Sekretär: *Hess*

Stouffer, *Lawrence.*	On the projective differential geometry of developpable surfaces.
Tzitzéica, *Bukarest.*	Sur les courbes quadratiques.
Strubecker, *Wien.*	Über Dreiecknetze aus Kreisen und Parabeln gleicher Achsenrichtung.

Sektion IIIb

Präsident: *Nielsen* Sekretärin: *Ganguillet*

Čech, *Brno.*	La notion de variété et les théorèmes de dualité.
De Rham, *Lausanne.*	Sur la notion d'homologie et les résidus d'intégrales multiples.
Pontrjagin, *Moskau.*	Formulierung und Beweis des allgemeinen Dualitätssatzes. (Vorgelegt von *Alexandroff.*)
Seifert, *Dresden.*	Poincarésche Räume.
Threlfall, *Dresden.*	Dreidimensionale Raumformen.

Sektion IV

Präsident: *Riebesell* Sekretär: *Gölz*

Guldberg, *Oslo.*	Zur Theorie der arithmetischen Verteilungsfunktionen und der statistischen Reihen.
Goldziher, *Budapest.*	Zur statistischen Theorie der logistischen Funktion.
S. Dumas, *Bern.*	Un problème capital du calcul des probabilités.
Sternberg, *Breslau.*	Wahrscheinlichkeit und Erfahrung.

Hostinský, Brno.	Valeurs moyennes des quantités qui varient avec le temps.
Guillaume, Neuchâtel.	Sur les fondements de l'économie rationnelle.

Sektion VIa

Präsident: *v. Mises* — Sekretär: *Lüssy*

Zaremba, Cracovie.	Sur la notion de la force dans la mécanique.
Papaïoannou, Athènes.	Sur le mouvement d'une figure plane dans son plan.
Horák, Prag.	Sur le principe d'Hamilton dans le cas des liaisons non-holonomes.
Féraud, Genève.	Stabilité relative.
Pérès et Molovar, Marseille.	Sur un problème concernant la théorie de l'aile d'envergure finie. (Vorgelegt von *Pérès.*)

Sektion VIb

Präsident: *Boulad bey* — Sekretär: *Aeppli*

Drumaux, Gand.	Sur l'univers sphérique d'Einstein.
Ricci, Napoli.	Alcune applicazioni meccaniche della geometria projettiva degli iperspaci.
Rosenblatt, Cracovie.	Sur les ondes de gravité.
Kogbetliantz, Paris.	Projet d'une expérience de laboratoire permettant de mesurer la vitesse V de l'attraction universelle.
Mosharrafa, Cairo.	Can matter and radiation be regarded as two aspects of the same world condition?
Labocetta, Roma.	Sulle costruzione di costanti fisiche di grandezza arbitraria.
Horák, Prague.	Sur la ligne d'univers des systèmes conservatifs.

Sektion VII

Präsident: *Reymond* — Sekretär: *Axer*

Loria, Genova.	A. L. Cauchy nella storia della geometria analitica.
Fraenkel, Kiel.	Über die Axiome der Teilmengenbildung.
Bernays, Göttingen.	Methoden des Nachweises von Widerspruchsfreiheit und ihre Grenzen. (30 Min.)
Heyting, Amsterdam.	Anwendung des intuitionistischen Logikkalküls auf die Definition der Vollständigkeit eines Kalküls.
Gonseth, Zürich.	Sur la méthode axiomatique et les difficultés actuelles.
Kolman, Moskau.	Über Marxens Begründung der Differentialrechnung.

Reymond, Lausanne.	La fonction propositionnelle en logique algorithmique et le principe du tiers exclu.

Sektion VIII

Präsident: *Smith, Hadamard* Sekretär: *Fehr*

Sitzung der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission

Diskussion. Annahme einer Resolution.

Samstag, 10. September, 15 Uhr

Sektion I

Präsident: *Blichfeldt* Sekretär: *Züllig*

Jarník, Prag.	Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.
Hofreiter, Wien.	Über Gitter und quadratische Formen.
Milne-Thomson, Greenwich.	A matrix representation of ascending and descending continued fractions.
Cahen, Paris.	Sur les fractions continues arithmétiques (Kettenbrüche) dont un même développement correspond à une infinité de nombres générateurs.
Candido, Brindisi.	Le serie ricorrenti associate del 2^0 ordine.
Koethe, Münster i. W.	Maximale Systeme unendlicher Matrizen.

Sektion IIa

Präsident: *Cerf* Sekretär: *Locher*

Geppert, Giessen.	Iterative Algorithmen.
Cremer, Köln.	Über das Zentrumproblem in der Theorie der konformen Abbildung.
Lense, München.	Über die konforme Abbildung durch die Besselfunktion. (Mit Lichtbildern.)
Tschakaloff, Sofia.	Sur un théorème de Darboux.
O. et J. Devisme, Le Havre.	Sur une propriété des cosinus d'ordre supérieur. (Vorgelegt von Frl. *O. Devisme.*)
Minetti, Roma.	Su alcuni teoremi delle famiglie normali di funzioni analitiche anche in relazione al postulato di Zermelo.
Minetti, Roma.	Metriciazzione dello spazio funzionale delle funzioni olomorfe.

Sektion IIb

Präsident: *Wiener* (*Doetsch*) Sekretär: *Krakowski*

Tonelli, Pisa.	Sul calcolo delle variazione.

Cinquini, Pisa.	Sulla semicontinuità degli integrali doppi del calcolo delle variazioni.
Jardetzky, Belgrade.	Sur les séries des figures d'un fluide en rotation permanente et zonale peu différentes des ellipsoides.
Doetsch, Freiburg i. Br.	Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül).
Saks, Providence.	On certain functionals.
Müntz, Leningrad.	Über die Lösung einiger Randwertaufgaben der mathematischen Physik.
Janet, Caen.	Détermination explicite de certains minima.
Fantappié, Bologna.	Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti (in 2 variabili).

Infolge der fortgeschrittenen Zeit verzichtete Herr *Tonelli* darauf, über die Arbeiten seiner Schüler *Cesare* (Sulle serie doppie) und *Del Chiaro* (Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz) zu referieren.

Sektion IIc

Präsident: *Watson* — Sekretär: *Rotach*

Kienast, Küsnacht.	Über die Dirichletsche Reihe für $[\zeta(s)]^\varrho$
Kogbetliantz, Paris.	Convergence et sommabilité de développement en séries des polynômes d'Hermite et de Laguerre.
Lévy, Paris.	Sur les méthodes de M. Norbert Wiener et la fonction $\zeta(s)$.
Mandelbrojt, Clermont-Ferrand.	Sur le produit $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\varphi(s)$ où $\zeta_\varphi(s) = \Sigma\frac{a_n}{n^s}$, $a_n = \varphi(n)$.
Karamata, Beograd.	Un théorème général d'inversion de procédé de sommabilité.

Sektion IIIa

Präsident: *Schouten* — Sekretär: *Hess*

Whitehead, Princeton.	Locally homogenious spaces in differential geometry.
Rowe, Dublin.	Subspaces associated with certain systems of curves in a Riemannian space.
Golab, Krakau.	Einige Bemerkungen über die Winkelmetrik in den Finslerschen Räumen.

Sektion IIIb

Präsident: *v. Kerékjártó* — Sekretärin: *Ganguillet*

Chuard, Lausanne. Une solution du problème des quatre couleurs.

Johansson, Strömmen, Oslo. Invarianz der topologischen Wechselsumme bei Dimensionsänderung.

Charpentier, Poitiers. Sur des courbes fermées analogues aux courbes de M. Birkhoff.

Čech, Brünn. Höherdimensionale Homotopiegruppen.

Hopf, Zürich. Über stetige Deformationen von Komplexen.

Sektion VIa

Präsident: *Buhl* — Sekretär: *Lüssy*

Riabouchinsky, Paris. Sur un problème d'hydrodynamique.

Kampé de Fériet, Lille. Détermination des mouvements plans d'un fluide visqueux incompressible où le tourbillon est constant le long des lignes de courant.

Weinstein, Breslau. Equations intégrales et théorie des sillages.

Sektion VIb

Präsident: *Drumeaux* — Sekretär: *Aeppli*

Nicolesco, Cernăuti. Extension du théorème de Liouville-Picard aux intégrales de l'équation de Fourier.

Boulad bey, Cairo. Sur le théorème de deux déplacements élastiques généralisé en vue de son application au calcul des constructions continues.

Meyer-Jaccoud, Zürich. Loi expérimentale sur les dynamomètres à allongements statiques proportionnels aux poids suspendus.

Protokoll der Schlussitzung

im Auditorium III der Eidg. Technischen Hochschule

Montag, den 12. September, 11 Uhr

Der Präsident eröffnet die Sitzung und verliest folgende beiden Danktelegramme:

Professeur R. Fueter, Président Congrès International Mathématiciens Zurich.
Très touché par votre message télégraphique dont je vous remercie cordialement et regrettant vivement de ne pouvoir faire acte de présence personnelle, je me fais un plaisir d'adresser aux mathématiciens réunis à Zurich, au nom du Conseil Fédéral et en mon propre nom, des vœux chaleureux pour le plein succès de leurs travaux et pour un agréable séjour en Suisse.

Motta, Président de la Confédération.

Professeur Fueter, Université de Zurich, Suisse.
Très touché des sentiments exprimés par votre télégramme je remercie les membres du Congrès Mathématique et leur envoie mes vœux pour le succès de cette réunion internationale.

Emile Picard.

Er teilt mit, dass das Kongresskomitee das Angebot von Prof. Fields zur Annahme empfiehlt und dem Kongress folgenden Antrag stellt:

Der Internationale Mathematikerkongress in Zürich nimmt das Angebot des verstorbenen Professors Fields, alle vier Jahre durch den Internationalen Mathematikerkongress zwei goldene Medaillen an zwei Mathematiker zu erteilen, mit bestem Dank an.

Le Congrès international de Zurich accepte avec de vifs remerciements l'offre du feu professeur Fields de faire distribuer par les Congrès Internationaux tous les quatre ans deux médailles en or à deux mathématiciens.

Il congresso internazionale di Zurigo accetta ringraziando l'offerta gentile fatta dal defunto professore Fields, di assegnare ogni quattro anni due medaglie d'oro a due matematici designati dai Congressi internazionali.

The international Congress of mathematicians held at Zurich accepts with thanks the offer made by the late professor Fields of two medals to be awarded to two mathematicians at intervals of four years by the international Congresses.

Dieser Antrag wird angenommen.

Ferner wird folgenden Beschlüssen des Kongresskomitees zugestimmt:

Das Kongresskomitee wählt in Ausführung des Fieldsschen Memorandums ein kleines Komitee, bestehend aus den Herren Birkhoff, Carathéodory, Cartan, Severi, *Takagi. Das Komitee ist ermächtigt, im Falle einzelne Mitglieder die Wahl nicht annehmen oder andere Bedürfnisse vorliegen, sich selbst zu komplettieren.*

Le Comité exécutif, conformément au mémorandum de M. Fields, désigne un comité restreint formé par Messieurs Birkhoff, Carathéodory, Cartan, Severi, Takagi. Le comité pourra se compléter lui-même si quelques membres n'acceptent pas leur élection ou si d'autres circonstances le rendent souhaitable.

Il Comitato esecutivo, conformemente al memorandum del professore Fields, elegge un comitato ristretto costituito dai professori Birkhoff, Carathéodory, Cartan, Severi, Takagi. Il comitato è autorizzato a completarsi da sè sia nel caso che singoli membri non accettino l'elenco anzidetto, sia che altri circonstanze lo rendano necessario.

The executif committee, in accordance with the memorandum of professor Fields chooses a small committee consisting of the following gentlemen: Birkhoff, Carathéodory, Cartan, Severi, Takagi. The committee is empowered to complete itself in the event of one or more of these gentlemen declining the election or if other circumstances render this necessary.

Der Kongress nimmt ferner folgende Beschlüsse der *Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission* einstimmig (in einer gemeinsamen Sitzung mit der Sektion VIII) an[1]:

1. *Le Congrès invite la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique à poursuivre ses travaux; il n'en résultera aucune obligation financière pour le Congrès et la Section VIII.*
2. *Jusqu'au Congrès de 1936 le Comité Central se composera de*
   MM. J. Hadamard, Paris, Président;
   P. Heegard, Oslo
   W. Lietzmann, Göttingen } *Vice-Présidents;*
   G. Scorza, Napoli
   H. Fehr, Genève, Secrétaire général et Trésorier.

   Il pourra désigner un ou plusieurs vice-présidents, un secrétaire-adjoint et d'autres membres entre autres M. E. H. Neville (Reading, Angleterre); il pourra nommer des membres honoraires. Le Comité Central pourra constituer des sous-commissions nationales en s'adressant aux Gouvernements ou aux Associations mathématiques; il incombera aux sous-commissions nationales de faire les démarches utiles en vue d'obtenir les contributions permettant de couvrir les dépenses du secrétariat général.

[1] Betr. diese Resolution in deutscher, italienischer und englischer Sprache siehe Bd. II dieser Verhandlungen, S. 366—367.

3. *La commission est invitée à élaborer un rapport sur les tendances actuelles dans le développement de l'enseignement mathématique dans les divers pays. Les rapports nationaux seront exposés personnellement par leurs auteurs au prochain Congrès; les rapports complets seront remis au secrétaire-général.*

Herr Prof. *A. Brill* in Tübingen feiert am 20. September dieses Jahres seinen neunzigsten Geburtstag. Der Kongress sendet folgendes Glückwunschtelegramm:

Professor Brill, Tübingen.

Der Internationale Mathematikerkongress in Zürich entbietet dem Altmeister der Theorie der algebraischen Funktionen zu seinem neunzigsten Geburtstage seine herzlichsten Glückwünsche.

Der Präsident: *Rud. Fueter.*

Der Präsident teilt mit, dass sich für die Aufnahme des nächsten Kongresses Norwegen angemeldet hat, dass ferner von Athen eine Einladung vorliege. Herr Professor *A. Guldberg* spricht die Einladung an den Kongress für *Oslo* aus. Diese Einladung wird mit grosser Begeisterung angenommen und der Präsident dankt Herrn Guldberg und den norwegischen Mathematikern herzlich.

Dem Kongress wird die folgende Resolution vorgelegt:

1. *Eine internationale Kommission wird gebildet, um die Beziehungen zwischen den Mathematikern der verschiedenen Länder aufs neue zu studieren und um am nächsten Kongresse einen Antrag über die Reorganisation dieser Beziehungen zu stellen.*
2. *Der Präsident des gegenwärtigen Kongresses wird ermächtigt, die Mitglieder dieser Kommission zu ernennen.*

1. *Une commission internationale est constituée pour étudier à nouveau les rapports entre les mathématiciens des différents pays et pour faire au prochain congrès une proposition pour la réorganisation de ces rapports.*
2. *Le président du congrès actuel est chargé de désigner les membres de cette commission.*

1. *È costituita una Commissione internazionale per studiare „ex novo" la questione della collaborazione internazionale nel campo delle Matematiche e per fare al prossimo Congresso una proposta per la riorganizzazione di queste relazioni.*
2. *Il Presidente dell'attuale Congresso è incaricato di designare i membri di detta Commissione.*

1. *An international commission is formed in order to re-study the question of the international collaboration in the sphere of mathematics and to make propositions with regard to its reorganisation at the next congress.*
2. *The actual president of the congress is charged to appoint the members of this commission.*

Dieselbe wird einstimmig angenommen. Auf Grund derselben hat der Präsident, Prof. *Fueter*, gemeinsam mit den Herren *Cartan*, *Severi*, *Veblen* und *Weyl*, folgende Herren in die Kommission gewählt: *F. Severi*, Präsident, *P. Alexandroff*, *H. Bohr*, *L. Fejer*, *G. Julia*, *J. L. Mordell*, *Terradas*, *Ch. de la Vallée-Poussin*, *O. Veblen*, *H. Weyl*, *S. Zaremba*.

Herr *A. Establier* regt an, dass die Kommission die Fragen der Bibliographie behandeln solle.

Herr *E. H. Neville* ersucht um Mitteilung, ob es Komitees für mathematische Tafeln auch ausserhalb Grossbritanniens gibt.

Herr *E. Bessel-Hagen* erinnert daran, dass der zweihundertste Geburtstag Lagranges in das Jahr 1936 des nächsten Kongresses fällt.

Frau Professor *Riabouchinsky* dankt dem zürcherischen Damenkomitee auf das wärmste für die vortreffliche Organisation des speziellen Programmes für die Damen.

Herr *E. Bortolotti* dankt dem Organisationskomitee und gedenkt in ehrenden Worten des verstorbenen Professors *Fields*, was lebhaften Beifall findet.

Hierauf schliesst Herr Professor Fueter den Kongress mit herzlichem Dank an die Teilnehmer sowie an die Zürcher Kollegen, die an der Vorbereitung des Kongresses mitgearbeitet haben.

Der Sekretär: *A. Speiser.*

Ansprachen

die anlässlich des Festaktes im Theater Zürich, Samstag, den 10. September, 19 Uhr und beim Empfang durch die Stadt Zürich im Grand Hôtel Dolder, Sonntag, den 11. September, 16 Uhr gehalten wurden.

Festakt im Theater, Zürich. 10. September, 19 Uhr

Ansprache von Herrn Prof. *R. Fueter*, Präsident des Kongresses, Zürich.
Ansprache von Herrn Bundesrat Dr. *A. Meyer*, Vorsteher des Eidgenössischen Departementes des Innern, Bern.
Ansprache von Herrn Prof. *M. Plancherel*, Rektor der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich.
Ansprache von Herrn Prof. *F. Fleiner*, Rektor der Universität Zürich.
Ansprache von Herrn Prof. *O. Veblen*, Präsident der amerikanischen Delegation, Princeton.
Ansprache von Herrn Prof. *H. Weyl*, Präsident und Delegierter der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Göttingen.
Ansprache von Herrn Prof. *E. Cartan*, Delegierter der französischen Regierung, Paris.
Ansprache von Herrn Prof. *F. Severi*, Präsident der italienischen Delegation, Roma.

Ansprache von Herrn Prof. R. Fueter, Präsident des Kongresses, Zürich

Hochgeehrte Festversammlung!

Als Präsident des Internationalen Mathematikerkongresses habe ich die grosse Ehre, Sie am heutigen Abend auf das herzlichste Willkommen zu heissen. Unsere festliche Zusammenkunft möchte öffentlich die Tatsache bekunden, dass die Mathematik, unsere Wissenschaft, eine der Grundlagen der heutigen Kultur ist.

Ich begrüsse in erster Linie Herrn Bundesrat Dr. Meyer, unsern hochverehrten Vorsteher des Eidgenössischen Departements des Innern. Wir sind stolz darauf, dass er den Abend mit uns verbringen will und zu uns sprechen wird.

Ich begrüsse die Behörden des Kantons Zürich, Herrn Regierungspräsident Dr. Streuli und unsern Erziehungsdirektor Dr. Wettstein. Wir wissen das Interesse zu würdigen, mit dem sie unsere Bestrebungen unterstützt haben.

Ich begrüsse den Stadtpräsidenten Dr. Klöti. Auch der Stadtrat hat unserm Kongress kraftvoll geholfen, was wir dankend hervorheben möchten.

Ich begrüsse ferner die Mitglieder des Ehrenkomitees. Unter ihnen befinden sich die führenden Persönlichkeiten der Banken und Industrie, die mit Weitblick die Bedeutung des Kongresses erkannt und uns geholfen haben. Allen sagen wir herzlichsten Dank, ganz besonders aber der Schweizerischen Kreditanstalt, ihrem verdienten Präsidenten Dr. Stoll und ihrem Generaldirektor Dr. Jöhr und dem Schweizerischen Bankverein, die uns von Beginn an tatkräftig beigestanden sind.

Ich begrüsse die Vertreter von 41 Ländern, sowie diejenigen von ungezählten Akademien, Universitäten und Gesellschaften. Es würde viel zu weit führen, sie alle einzeln zu nennen. Wir fühlen uns aber tief geehrt durch ihre Anwesenheit. Sie ist uns ein Zeichen für die Bedeutung, die dem Kongresse beigemessen wird. Mit dem aufrichtigen Danke verbinden wir die Hoffnung, dass Zürich ihnen in guter Erinnerung bleiben wird.

Die heutige Veranstaltung ersetzt das sonst übliche Bankett. Wir hoffen, dass die Bewegungsfreiheit, die diese Räume gestatten, das sich Kennen- und Verstehenlernen besser erlauben wird; ja, möchten recht viele Freundschaften heute abend geschlossen werden. Jeder kann in der grossen Zahl anwesender Gelehrter noch Entdeckungen machen, und solche finden, die er noch nicht gesprochen hat.

Ich hoffe, dass Sie sich wohl fühlen werden und dass Sie das folgende schweizerische Unterhaltungsprogramm in lieber Erinnerung behalten werden. Vielleicht darf man auch von uns in historischer Anlehnung heute das Wort sagen: „Der Kongress tanzt."

Ansprache von Herrn Bundesrat Dr. A. Meyer, Vorsteher des Eidgenössischen Departementes des Innern, Bern

Ein angenehmes Mandat führt mich zu Ihnen: im Namen des Bundesrates dem Internationalen Mathematikerkongress den Gruss unserer obersten Behörde und unseres Landes zu überbringen. Mit Freude haben wir gesehen, eine wie grosse Zahl hochangesehener Gelehrter aus etwa 40 fremden Staaten nach Zürich kamen, um hier fachmännische Tagungen abzuhalten. Wir sind überzeugt, dass diese Versammlung ein wichtiges Ereignis für die Wissenschaft bedeutet. Die Bundesregierung hat zwar mit den Angelegenheiten der Wissenschaft in unserm Lande nicht viel direkte Beziehungen. Die kulturellen Angelegenheiten sind bei uns das Privileg der Kantone. Der Bund besitzt und unterhält nur eine Schule, die Eidgenössische Technische Hochschule. Diese hegt er mit um so grösserer Liebe und ist bestrebt, sie den modernen Bedürfnissen entsprechend auszubauen. Gerade diese Anstalt ist (neben den Universitäten) bemüht, das Fachgebiet der Mathematik zu pflegen. Wir freuen uns, durch das Mittel dieser Hochschule mit Ihrer hohen Versammlung eine besondere

Beziehung zu haben. Die Dezentralisation unseres Bildungswesens bis hinauf zu den Universitäten liegt im Sinne unserer ganzen staatlichen Struktur. Unser Volk ist aus Gruppen verschiedener Sprache und Kultur zusammengesetzt. Diese Gruppen haben die kulturellen Interessen in ihrem Geiste zu pflegen. Das bringt eine Zersplitterung der Mittel mit; unsere sieben Universitäten bürden den Kantonen, die sie unterhalten müssen, grosse Lasten auf. Aber dadurch sind die Schulanstalten in enger Beziehung zu den kulturellen Gruppen, sie stehen dem Volke näher und sind stärker in ihm verwurzelt. Das ist wichtig für die Demokratie, denn in ihr kann man für die Volksbildung nie genug tun, und jede Kraft, die Anregung gewährt, ist segensreich. So finden wir uns denn mit der weitgehenden Dezentralisation des Bildungswesens ab und glauben an ihren günstigen Einfluss.

Die Mathematik gehört ja nicht zu denjenigen Wissenschaften, denen man eine übergrosse Popularität nachrühmen kann. Manche halten nicht viel von ihr, und auch im Jahr des Goethe-Jubiläums ist aus dem Urteil des unsterblichen deutschen Dichters kein verklärender Strahl auf diese Wissenschaft gefallen. Aber wir wollen uns bewusst sein, dass sie die Quelle der exakten Wissenschaften ist, dass aus ihr die wissenschaftliche Technik hervorgewachsen und dass eine Erforschung der Naturgesetze ohne sie undenkbar wäre. Die Kulturgeschichte zeigt aber auch die Mathematik in inniger Beziehung zu den Problemen, mit denen die grossen Geister aller Zeiten gerungen haben. Die Mathematik steht am Anfang unserer geistigen Kultur. Wir staunen heute über die Leistungen, die vor vielen Jahrhunderten aus den Forschungen derer hervorgingen, in denen der Geist der Zahlen lebte. Unser Zürcher Dichter Konrad Ferdinand Meyer lässt in einem seiner Gedichte den Chor der Toten zu den Lebenden sprechen:

„Und was wir an gültigen Sätzen gefunden,
Dran bleibt aller irdische Wandel gebunden."

Das ist offenbar auf die Mathematik zugeschnitten. Ihre Wahrheiten dauern durch die Jahrhunderte, unberührt von den grossen Katastrophen, die zeitweise eine Umwertung aller Werte mit sich zu bringen drohen. Die Mathematik ist uns allen aber ein leuchtendes Vorbild für die wissenschaftliche Betätigung überhaupt. Ihre Forschung wird betrieben um ihrer selbst willen. Durch das mathematische Denken werden bleibende Wahrheiten gefunden. Insofern ist die Mathematik, wenn man so sagen will, die „unpraktische" Wissenschaft. Aber gerade sie schafft in so vielen Fällen Resultate, die tief in das Leben der Menschheit hineinreichen und die mit der geistigen auch die materielle Entwicklung des Menschengeschlechtes beeinflusst haben. Ist doch die Mathematik die Dienerin praktischer Zweige der Volkswirtschaft geworden, wäre es nur darum, weil sie die heute auf allen Gebieten angewandte Versicherung ermöglicht und damit einen wichtigen Schritt erlaubt hat, um den Zufall möglichst auszuschalten und die wirtschaftliche Stetigkeit und

Sicherheit des einzelnen Menschen zu mehren. Ähnlich ist es aber mit der Wissenschaft überhaupt. Je mehr ihre Forschung aus idealem Sinne erfolgt, je tiefer sie um ihrer selbst willen gepflegt wird, um so grossartiger sind oft nicht nur ihre theoretischen, sondern auch praktischen Resultate. Die Wissenschaft muss höchster Idealismus sein, um das Beste zu leisten.

Es ist noch ein Grund, der mir die Pflicht, hier unsern Gruss zu entbieten, besonders angenehm macht. Die Schweiz ist der Sitz des Völkerbundes. Wir sehen seine Anstrengungen und erfahren seine Schwierigkeiten. Uns ist es tiefer Ernst, mit allen Völkern in Frieden zu leben. Unsere Lage im Herzen Europas und die Zusammensetzung unserer viersprachigen Bevölkerung führen uns dringend zu diesem Streben. Wir sind dem Völkerbund aber auch deshalb von ganzem Herzen zugetan, weil wir tagtäglich in unserm eigenen Volke Zeuge sind der gegenseitigen wohltuenden Befruchtung der verschiedenen Sprachen und Kulturen. Wir in unserm Lande haben keine Sprachenfrage, wir kennen keine Minderheitenprobleme. Wir möchten der ganzen Welt diese Versöhnung der Rassen und Kulturen gönnen. Da ist es uns denn eine besondere Befriedigung, auf die internationale Zusammensetzung Ihres Kongresses zu blicken. Auf dem Wege gemeinsamer Arbeit werden die Völker am ehesten sich kennen und achten lernen. Und wenn diese Arbeit auf so erhabene Höhen führt, wie die Ihrige, dann ist die völkerverbindende Kraft eines solchen Kongresses von doppeltem und dreifachem Segen. Ich danke Ihnen, dass Sie in unser Land gekommen sind und gratuliere Ihnen zu Ihren glücklich vollendeten Tagungen.

Allocution prononcée par le prof. M. Plancherel, recteur de l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

L'Ecole polytechnique fédérale qui a déjà ouvert ses portes au premier congrès international des mathématiciens a été heureuse et fière de les ouvrir à nouveau, pour recevoir, à 35 ans d'intervalle, les géomètres venus de toutes les parties de l'univers prendre part au congrès de Zurich.

Ecole destinée avant tout à former des ingénieurs, des praticiens pour lesquels les mathématiques, bien qu'indispensables, ne sont qu'un instrument de travail, l'Ecole polytechnique possède cependant deux sections de sciences pures: l'école des sciences mathématiques et physiques, l'école des sciences naturelles. Je dois rendre aux hommes qui se sont succédé à la présidence du Conseil de l'Ecole le témoignage qu'ils n'ont pas mesuré la sollicitude qu'ils ont vouée à ces deux sections au nombre de leurs étudiants; l'Ecole n'a reculé devant aucun sacrifice pour maintenir élevé leur niveau scientifique et en faire des foyers de recherches. Les noms de Raabe, de Dedekind, de Christoffel, de H. Weber, de Schwarz, de Frobenius, de Hurwitz, pour ne citer que quelques-uns des maîtres qui ont enseigné de longues années à notre Ecole au cours du 19^{me} siècle, en sont la preuve.

Le hasard a voulu que celui qui vous parle et qui vous apporte ici le salut du corps professoral de l'Ecole polytechnique soit un des vôtres. Il lui sera donc permis de brosser à grands traits, devant vous, le tableau de quelques-uns des progrès de notre science dans l'intervalle de temps qui sépare les deux congrès de Zurich.

Le premier congrès de Zurich est à peine terminé qu'à la suite des travaux de G. Cantor, nous voyons la théorie des ensembles et celle des fonctions de variables réelles prendre entre les mains de MM. Baire, Borel, Lebesgue, Young, de la Vallée-Poussin, un essor nouveau. Les notions qu'elles introduisent et qu'elles rendent familières se montrent bientôt indispensables dans tous les domaines de l'Analyse.

La théorie des équations intégrales à laquelle les noms de Fredholm, de Hilbert, de Volterra resteront pour toujours attachés, prend naissance et permet de résoudre des problèmes auxquels Riemann, Neumann, Schwarz et Poincaré s'étaient attaqué. La conférence que M. Carleman nous a donnée a montré qu'elle est loin d'avoir épuisé le champ de ses applications.

La géométrie, d'une part, scrute ses fondements grâce à la méthode axiomatique; elle reçoit, d'autre part, de la physique théorique, une impulsion nouvelle qui dans les travaux de Weyl et de Cartan lui fait briser ses cadres, pourtant déjà élargis par Riemann.

Dans la théorie des fonctions analytiques, le problème de l'uniformisation est résolu par Poincaré et Koebe; il fait le pont entre les points de vue de Riemann et de Weierstrass. Le théorème de Picard est le point de départ d'une série de belles recherches sur les fonctions entières et méromorphes. La théorie de la représentation conforme s'achève et des travaux récents jettent quelque lumière dans le domaine encore si obscur des fonctions analytiques de deux variables. Après avoir entendu sur ces sujets les conférences de MM. Julia, Valiron, Nevanlinna, Bieberbach, Carathéodory et Severi, relisons la belle conférence que Hurwitz fit au congrès de 1897; nous mesurerons mieux le chemin parcouru.

Je ne dirai rien de l'algèbre et de la topologie, au renouveau desquels nous assistons depuis quelques années et dont le rôle devient de plus en plus prépondérant.

Si nous jetons un regard sur la physique théorique, nous voyons que, par harmonie préétablie, serions-nous tenté de dire, les théories qu'elle développe, toutes révolutionnaires qu'elles soient ou qu'elles paraissent être, trouvent leur expression mathématique dans la théorie des groupes, dans celle des transformations fonctionnelles et, par ricochet, qu'elles proposent aux mathématiciens de nouveaux problèmes et provoquent de nouveaux progrès.

A ces progrès ont contribué des géomètres de races différentes, de nations différentes, témoignage réconfortant de l'unité de la pensée mathématique. Vérité en deçà, erreur au-delà des Pyrénées, ce mot de Pascal ne s'applique pas à notre science. Pourquoi faut-il qu'il se vérifie dans tant de domaines?

Entre les deux congrès de Zurich la guerre a passé, semant la haine, accumulant les ruines, asservissant la science à son œuvre de destruction. Dans quelques dizaines d'années Zurich recevra peut-être pour la troisième fois l'élite des géomètres du monde entier. Je souhaite que mon successeur, à cette place, n'ait plus à évoquer ce spectre, mais qu'il puisse rendre à notre génération de mathématiciens le témoignage qu'elle a apporté, elle aussi, sa pierre à la construction de la science et sa bonne volonté à l'œuvre de loyale collaboration et d'intelligente compréhension des peuples.

Ansprache von Herrn Prof. Dr. iur. Fritz Fleiner, Rektor der Universität Zürich

Die Universität Zürich ist Ihnen zu grossem Danke verpflichtet dafür, dass Sie bei uns Ihren Kongress abgehalten haben. Die Mathematik hat im 18. Jahrhundert einen bestimmenden Einfluss ausgeübt auf die Entwicklung des geistigen Lebens von Zürich. Unter dem Zeichen des unsterblichen Namens von Newton gelang es dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Denken, die erstarrten Formen der geistlichen und staatlichen Orthodoxie zu brechen und den Boden für die Aufklärung vorzubereiten. Aus dieser sodann schöpfte seine Nahrung der kritische Sinn, der die öffentlichen Einrichtungen durch die französische Revolution hindurch in die neue Zeit hinüberleitete. Am Eingang der neuen Epoche steht in Zürich die einsame Gestalt des grossen Reformators der Erziehung, Heinrich Pestalozzi. Mit der einfachen Anschauung der Dinge, so lehrte er, müsse die Erziehung jedes Kindes beginnen. Unsre ganze Anschauung müsse ihren Ausdruck finden in Zahl, Form und Sprache, und zu den Elementen der menschlichen Erziehung gehöre es, Zahlbegriffe mit Raumanschauungen zu verbinden. Als Mittel für die Volksschule gedacht, ergriff einer der glühendsten Schüler Pestalozzis, Jakob Steiner, den Gedanken des schlichten Armenlehrers und baute auf ihm das System seiner Geometrie auf.

Kein Wunder, dass die alte Gelehrtenschule Zürich, das Carolinum, der Mathematik den gebührenden Platz anwies. Als im Jahre 1833 der Kanton Zürich aus eigener Kraft aus dem Carolinum unsere Universität erstehen liess, deren Jubiläum wir im kommenden Jahre feiern werden, da wurde auch der Mathematik im Rahmen der Philosophischen Fakultät eine dauernde Stätte bereitet. Zwanzig Jahre später trat unsrer kantonalen Universität das Eidgenössische Polytechnikum, die heutige Eidgenössische Technische Hochschule, zur Seite, eine der ersten grossen Gründungen des schweizerischen Bundesstaates. Da erschien zunächst, aus ökonomischen Gründen, eine Verbindung der Mathematikprofessuren an beiden Hochschulen die Lösung darzustellen. Aber der mathematische Impetus der Universität erreichte die

Verselbständigung des mathematischen Lehrbetriebes an der Universität durch Errichtung eigener Universitätsprofessuren, und diesem Dualismus der mathematischen Professuren an unsern beiden Hochschulen verdanken wir die reiche Entfaltung des mathematischen Unterrichtes und der mathematischen Forschung in Zürich, die uns heute die Ehre eingetragen hat, den internationalen Mathematikerkongress zu beherbergen. So fusst auch auf diesem Gebiet, wie im übrigen Bereiche unseres staatlichen Lebens, das Beste auf der Tradition. Aber auch die übrigen Universitäten der Schweiz haben unentwegt an ihren eignen mathematischen Professuren festgehalten. Da wir am heutigen Abend im Zeichen der Mathematik tagen, so ist es mir ein Bedürfnis, einen besonderen Gruss hinüberzusenden an unsre Schwesteruniversität Basel und an die Stadt Basel, die Heimat Leonhard Eulers.

Wie das mathematische Denken vor zwei Jahrhunderten den Antrieb zur Umgestaltung des öffentlichen Geistes in Zürich abgab, so ist auch in der Gegenwart in unserm politischen Rahmen der Respekt vor der Zahl ein Kennzeichen unsres demokratischen Staates. Die oberste Entscheidung in allen sachlichen Fragen des Staatslebens steht dem Volke zu. Verfassungsgesetze, wie einfache Gesetze bedürfen der Zustimmung der einfachen Mehrheit der stimmenden Bürger. Bei der juristischen Ergründung des Satzes, dass die Mehrheit König ist, empfindet der Vertreter des öffentlichen Rechts einen besondern Stolz in dem Bewusstsein, wenigstens im Vorhof des mathematischen Tempels zu stehen. Ja, unser eidgenössisches Gesetz über das Proportionalwahlverfahren für den Nationalrat bedient sich dort, wo es vom Begriff der Verteilungszahl (nach dem System Hagenbach-Bischoff) spricht, direkt einer mathematischen Redewendung und zeigt Ihnen, dass sogar die Demokratie nicht ohne einen Zusatz mathematischer Theologie auszukommen vermag.

Nur in *einem* Punkte hat die Schweiz die mathematischen Gesetze beiseite geschoben. Der Anteil unsrer drei Nationalsprachen und Kulturen an dem Aufbau und der Weiterbildung unsres öffentlichen Lebens wird nicht auf das Prinzip der zahlenmässigen Stärke von Deutsch, Französisch und Italienisch, gegründet. Wir besitzen dafür nur *eine* Formel: die volle Gleichberechtigung der drei Nationalsprachen. Dieses Verständnis für Eigenart und Zusammenarbeiten verschiedener ethnographischer Elemente findet auch bei Ihnen volle Billigung. Denn im Bereiche der mathematischen Forschung gehen von Land zu Land die Schlagbäume in die Höhe. Mit Bewunderung blicken wir auf eine Wissenschaft, die von aller Erdenschwere befreit ist und doch an die letzten Rätsel des Lebens und der Natur heranzutreten vermag. Wir preisen mit Recht, dass das persönliche Element, welches das Leben so oft vergiftet, von der Schwelle der Forschung fernbleiben muss. Ganz vermögen wir uns jedoch davon nicht zu befreien, und wir gefallen uns in der Hoffnung, dass bei Ihnen da und dort während Ihrer künftigen Studien eine Erinnerung an Zürich mitschwingen und ein leiser zürcherischer Ton mitklingen werde. Seien Sie versichert, dass Ihnen von den Hängen des Zürichberges ein lautes Echo antworten wird.

Address of M.O.Veblen, Professor and Chairman of the Delegation of the United States, Princeton

Professor Veblen spoke informally without notes. He expressed the gratitude which all mathematicians must feel to Professors Fueter and Speiser for the generous way in which they came forward at Bologna, under very difficult circumstances, and invited the Congress to Zürich. He felicitated them on their brilliant success in carrying out the arduous task which they had assumed at that time. He also thanked the Swiss Government, the city of Zürich, the University of Zürich, and the Federal Technical School for their hospitable cooperation. Finally, he referred to the friendliness and pleasant manners of the citizens of Zürich of all classes which he illustrated by a pleasant little incident.

Discours de M. Elie Cartan, Délégué de l'Institut et du Gouvernement de la République Française, Paris

Mesdames, Messieurs,

Mes premières paroles seront pour remercier, au nom des mathématiciens de langue française, les autorités fédérales, les autorités cantonales et la municipalité de Zurich de l'intérêt qu'elles ont témoigné à notre congrès; c'est leur concours qui a permis de réaliser cette organisation parfaite que nous avons tous admirée et grâce à laquelle notre séjour à Zurich ne nous laissera que des souvenirs charmants.

La ville de Zurich est l'une des capitales intellectuelles de l'Europe. C'est un de ces lieux où s'allient le plus harmonieusement l'art et la science, la pensée et l'action, la théorie et la pratique. Cette union trouve son symbole dans cette magnifique Ecole polytechnique fédérale qui, avec l'Université, a donné asile à nos séances. Sans avoir encore réussi à être centenaire, elle a cependant depuis longtemps acquis une réputation mondiale par la beauté de ses laboratoires, l'excellence de son enseignement et le libéralisme avec lequel elle accueille les élèves et les maîtres de tous les pays. Pour nous autres mathématiciens, c'est surtout l'Ecole où ont enseigné les Dedekind, les Christoffel, les Schwarz, les Frobenius, les Minkowski, les Hurwitz, sans parler de ceux qui vivent encore et dont quelques-uns comptent parmi les maîtres de la pensée mathématique contemporaine. Enfin on nous a rappelé à toute heure du jour, au cas où nous aurions pu l'oublier, que la Suisse est la patrie de Léonard Euler, l'un des plus grands génies mathématiques de tous les temps, à qui la Société helvétique des sciences naturelles est en train d'édifier un monument grandiose par la publication de ses œuvres complètes. Me sera-t-il permis d'ajouter qu'à l'admiration que nous avons tous pour Euler se joint une nuance d'affection, depuis que son effigie nous a ouvert libéralement les portes de tous les tramways de Zurich!

Tout notre temps ne s'est heureusement pas passé dans les tramways, ni même à écouter des conférences ou à parler de mathématiques. Le Comité d'organisation s'est ingénié à nous faire connaître les plus beaux sites de la Suisse, qui en compte tant. Je ne me donnerai pas le ridicule de chanter, après tant d'autres, les forêts, les lacs et les montagnes de la Suisse. Une impression qui nous a tous frappés est que nulle part, me semble-t-il, la nature n'est plus humaine. Dans notre promenade de mardi dernier sur le lac de Zurich, un élément essentiel aurait manqué au charme qui se dégageait du paysage harmonieux déroulé sous nos yeux si l'homme n'y avait manifesté sa présence par toutes ces villas étagées sur le flanc des montagnes et par les lumières qui, à la chute du jour, se sont mises à briller comme autant d'étoiles, formant ainsi un ensemble dont il eût été impossible de détacher le moindre détail sans nuire à la beauté du tout. Un philosophe ancien, je ne sais lequel, a donné de l'art la définition suivante: homo additus naturæ. Pour autant que cette définition est exacte, la Suisse est une immense œuvre d'art.

Mais la Suisse est beaucoup plus que cela. Ceux qui, comme moi, ont pris part à l'excursion du lac des Quatre-Cantons n'ont pu se défendre d'une émotion profonde en passant devant la Tellsplatte et la plaine du Rutli. Ce sont là des lieux sacrés; les sentiments qui ont animé là quelques centaines de paysans font maintenant partie du patrimoine moral de l'humanité tout entière. De ces sentiments très simples, mais lourds de répercussions lointaines, est sortie la Suisse actuelle, terre de stabilité dans la tempête, asile de concorde pour tous les hommes de bonne volonté. N'en doutons point! Voilà la raison profonde pour laquelle le premier congrès international des mathématiciens s'est réuni à Zurich en 1897; voilà aussi la raison profonde pour laquelle nous nous trouvons réunis à Zurich en 1932.

Ceux d'entre nous qui ont assisté il y a quatre ans au congrès de Bologne, présidé par notre cher et vénéré collègue M. Pincherle, ne se rappellent pas sans émotion la séance de clôture tenue dans la magnifique salle, chargée d'histoire, du Palazzo Vecchio, séance dans laquelle notre collègue M. Fueter, répondant à l'éloquent appel de M. Pincherle, nous invitait officiellement à tenir notre prochain congrès à Zurich. Nous nous rendions trop bien compte du lourd travail que nos collègues suisses s'imposèrent ainsi et nous leur étions reconnaissants par avance de leur dévouement. Si nous cherchons par extrapolation à déterminer le nombre des congrès qui se tiennent annuellement à Zurich, nous arrivons à des chiffres astronomiques puisque, d'après ce que nous avons pu constater par nous-mêmes, il s'en tient un nouveau tous les trois jours. Il est extraordinaire que nos collègues, et en particulier l'éminent Recteur de l'Ecole polytechnique puissent y résister. Il est vrai que, à ce rythme, il a dû se créer, pour l'organisation des congrès, une technique merveilleuse, et c'est ce que notre expérience vérifie. Mais il y a une chose que la technique la plus perfectionnée ne donnera jamais, c'est la cordialité de l'accueil et, bien plus encore, ce je ne sais quoi, difficile à exprimer par des mots, qui nous fait sentir qu'on est reçu par des amis, heureux de nous accueillir, heureux de nous sentir contents chez eux, heureux de trouver dans notre joie la récompense de leurs efforts. Si notre cher président M. Fueter, si M. le Recteur Plancherel, si tous leurs collaborateurs avaient éprouvé, avant l'ouverture du congrès, une appréhension quelconque, qu'ils soient rassurés. Mes chers collègues, nous sommes très contents de notre séjour chez vous, et je suis très heureux d'avoir été choisi pour vous le dire.

Ansprache von Herrn Prof. Weyl, Präsident und Delegierter der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Göttingen

Geehrte Festversammlung!

Wir wohnen hier einem ausserordentlich unwahrscheinlichen Ereignis bei. Für die Zahl n der vor dem jetzigen Augenblick eröffneten internationalen Mathematikerkongresse besteht die Ungleichung $7 \leqq n \leqq 9$; zu einer genaueren Aussage reichen leider unsere axiomatischen Grundlagen nicht aus. Vergleichen Sie damit die Zahl der vorhandenen Städte, so ist es doch höchst verwunderlich, dass von diesen $\leqq 9$ Kongressen jetzt bereits der zweite hier in Zürich stattfindet. Ich glaube aber, dass für die eben recht vage formulierte Wahrscheinlichkeitsaussage diejenige Lehre über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung recht hat, welche sagt, die Wahrscheinlichkeit sei relativ auf unser Wissen bzw. Nichtwissen. Man muss nur einige Tatsachen *wissen*, um dem Ereignis, welchem wir beiwohnen, seinen erstaunlichen Charakter zu nehmen.

Der Reigen der internationalen Mathematikerkongresse wurde 1897 von Zürich eröffnet. Damals formulierte der Präsident des Kongresses, Herr Geiser, die eine und fundamentalste der Tatsachen, auf die man sich zum Verständnis des vorliegenden erstaunlichen Ereignisses berufen muss, in seiner Eröffnungsansprache folgendermassen: „Nachdem auf Grund mannigfacher mündlicher und schriftlicher Korrespondenzen das Projekt eine festere Gestalt anzunehmen begonnen hatte und auch die Ortsfrage wiederholt in Erwägung gezogen worden war, wurde es allgemein als zweckmässig bezeichnet, dass der erste Versuch von einem Lande ausgehen möchte, das durch seine Lage, Verhältnisse und durch seine Tradition zur Anbahnung internationaler Beziehungen besonders geeignet sei. So richteten sich denn bald die Blicke nach der Schweiz und insbesondere nach Zürich.“ Nach der namenlosen und beschämenden Verwirrung der Geister im Gefolge des grossen Krieges wurde die Schweiz noch mehr als zuvor zum Hort der kulturellen Einheit Europas, die allen Zerklüftungen durch Sprache, Geschichte und nationalen Kampf zum Trotz besteht. Auf ihrem Boden knüpften sich die zerrissenen Fäden wieder an. Als Vertreter einer Wissenschaft, die, was Universalität ihres Gehalts und ihrer Ausdrucksmittel anlangt, nur noch in der Musik ihresgleichen hat, sind wir Mathematiker natürliche Verbündete des Ideals, das im staatlichen Leben Europas die Schweiz verkörpert. So fangen auch wir in gewissem Sinne in Zürich zum zweitenmal wieder an, wie ich hoffe, zu dem Gelöbnis bereit: Wir wollen um des politischen Kampfes willen einander nie wieder als Menschen und als Mathematiker verraten.

Aber die Schweiz ist uns Mathematikern zugleich teuer als das Geburtsland einiger unserer grössten Heroen. Ihr gehört jene wunderbare Mathematikerdynastie an, die Familie der Bernoullis, unter denen namentlich Jakob, Johannes und Daniel hervorleuchten. Die Schweiz schenkte uns im 18. Jahrhundert das überragende Genie Leonhard Eulers, im 19. den urwüchsigen geometrischen Geist Jakob Steiner. Auch in Zeiten, denen so gewaltige Begabungen nicht den Stempel aufdrückten – sie bleiben ja immer ein seltenes, kostbares Geschenk der Natur –, hat die Mathematik in Unterricht und Forschung ständige Pflege gefunden; und wir Mathematiker deutscher Zunge freuen uns von Herzen der blühenden Frische, welche gerade jetzt das mathematische Leben der Schweiz aufweist.

Als einen dritten Grund dafür, dass wir Mathematiker uns abermals und in so grosser Zahl in Zürich getroffen haben, betrachte ich die Lage und unvergleichliche Schönheit dieses Landes und insbesondere dieser Stadt. Da bin ich nun versucht, wenn ich nicht mein Herz festhalte, mich zu meinen deutschen Kollegen zu wenden und ohne Ende zu weisen und zu preisen. Denn dies ist die Stadt, in der ich viele Jahre lang, als Nachfolger von Herrn Geiser, im Lehramt an der Technischen Hochschule zu wirken das Glück hatte. Erinnerungen stürzen wie ein Schwarm von Möwen auf mich herab: Die Stadt bei einem Gang über die Gemüsebrücke an Wintertagen, Nachmittage auf dem Dolder, kurze Spaziergänge am Waldrand entlang oberhalb der Susenbergstrasse an Föhntagen, wenn die ganze Alpenkette vom Säntis bis zur Jungfrau in klarem Glanze dalag, stille Sommerabende auf unserm Balkon, von wo wir auf das wabernde Lichtermeer der Ufer des eindunkelnden Sees bis über Thalwil hinaus schauten, ein Morgen auf dem Uetliberg, Wanderung die Albiskette entlang; vor allem aber der See mit Schifflifahren, Rudern, Segeln und Baden; die Landschaft des Zürichsees, die Goethe in ein paar so herrlichen Zeilen besang, dass jede andere Schilderung davor verstummen muss. Ich hoffe, dass alle Kongressmitglieder in diesen Tagen, denen der Wettergott hold war, ein bisschen von alledem gesehen und genossen haben, was in mir als Erinnerung vieler Jahre aufgespeichert ist; in manchem wird der Hymnus des Dichters Klabund, der hier eine Zuflucht fand, wie in mir eine Gefühlssaite zum Mitschwingen bringen:

„Ich darf im Arm der Freiheit ruhig schlafen,
Und Zürich heisst mir mehr als: Stadt am See.
Es heisset: Blumenauge, Alpenhafen,
Und sonnengoldbeglänzte Danae.“

Das alles hätte uns aber nicht nach Zürich gebracht, wenn nicht noch ein Viertes gewesen wäre: der Mut von Herrn Fueter, der es vor vier Jahren in Bologna wagte, in einer gar nicht einfachen Situation, die Einladung nach Zürich auszusprechen, zusammen mit der Initiative seiner Zürcher und Schweizer Kollegen. Er wusste, dass er sich ausser auf diese auf die weitgehende Unterstützung der Behörden und weiterer Kreise in Stadt, Kanton und Eidgenossenschaft verlassen konnte. Trotzdem war es kein geringes Wagnis. Die in der Zwischenzeit eingetretene furchtbare wirtschaftliche Depression hat die Aufgabe noch viel schwerer gemacht. So mancher internationale Kongress wurde im letzten Jahre abgesagt, der Mathematikerkongress findet statt. Dass Ihr das zustande gebracht habt, liebe Schweizer Kollegen, und uns diese wunderschöne Tagung bereitet habt, dafür sind wir Euch den grössten Dank schuldig.

Trotz des dicken Grenzstriches, den Not- und Devisenverordnungen gegenwärtig zwischen Reichsmark, Schilling und dem schweizer Franken ziehen, können wir Deutsche und Österreicher nicht anders als uns herzlich Euch Schweizern verbunden fühlen. Wir sprechen mit dem grösseren Teil Eures Volkes dieselbe Sprache, wenn Ihr auch treuer als die meisten andern deutschen Stämme an Eurer besonderen Mundart festgehalten habt. Von Zürich ging im 18. Jahrhundert die Wiederentdeckung des Wesens deutscher Poesie aus, im 19. Jahrhundert war ein grösster Meister deutscher Prosa Staatsschreiber zu Zürich. Der Beziehungen herüber und hinüber liessen sich gar viele aufzählen.

Von Göttingen, wo ich jetzt beheimatet bin, habe ich zweierlei mitgebracht, was ich als Zeugnis unserer engen Verbundenheit anführen kann. Das Erste ist ein hübsches altes Bändchen, das ich dieser Tage in einem Göttinger Antiquariat auftrieb, enthaltend Albrecht von Hallers „Versuche Schweizerischer Gedichte“, in zehnter Auflage gedruckt in der Göttinger Universitätsbuchhandlung 1768. Haller, ein bodenständiger Berner und ein Gelehrter von schier universalem Umfang des Forschungsgebiets, begründete in den ersten Jahrzehnten den Ruhm der Göttinger Universität, an welcher er später in Männern wie Gauss und Riemann nicht unwürdige Nachfolger finden sollte. Unter den in jenem Bändchen vereinigten Poesien finden wir das grosse Gedicht „Die Alpen“, Verse an den Zürcher Freund Bodmer und auf die Hochzeit des Berner Schultheissen v. Steiger neben Kantaten zur Einweihung der „Göttinger hohen Schule" und zur Begrüssung ihres Gründers, des englischen Königs Georg II. Auch ein Gedicht an den Zürcher Canonicus und Mathematicus Gessner, aus dem ich eine Strophe hier zitieren will:

Bald steigest du auf Newtons Pfad
In der Natur geheimen Rat,
Wohin dich deine Messkunst leitet.
O Messkunst, Zaum der Phantasie!
Wer dir will folgen, irret nie;
Wer ohne dich will gehn, der gleitet.

Von Haller selber erzählt sein Biograph, dass er bei Tische, auf der Strasse, zu Pferde und beim Spazierengehen jederzeit einen klassischen Schriftsteller vor sich hatte und an seinem Hochzeitstage in der Differentialrechnung arbeitete. Von diesem nüchternen Gelehrtengeiste unseres ersten grossen Berner Lehrers haben „wir Völker an der sanften Leine" – wie er uns einmal nennt – immer etwas behalten, wenn wir auch so hohes Vorbild kaum mehr erreichen. Aus seinem Gedichtband strahlt uns die weltbürgerliche Gesinnung des 18. Jahrhunderts entgegen, deren hinreissenden Ausdruck in Lessings „Nathan der Weise" ich vorgestern in der Eröffnungsvorstellung des hiesigen Schauspielhauses von neuem erlebte. Wir, Kinder einer Epoche, die das nationale Zelotentum erfunden hat, schauen mit Neid darauf zurück.

Der zweite Zeuge enger Verbundenheit von deutsch und schweizerisch, den ich neben diesem Gedichtbändchen mitgebracht habe, das bin ich selbst. Legen Sie mir das nicht als Überhebung aus! Die Deutsche Mathematikervereinigung hat mich für dieses Jahr zum Vorsitzenden erwählt in ausdrücklichem Hinblick auf den Zürcher Kongress. Nehmt diese Geste, liebe Schweizer Freunde, statt aller Worte als Ausdruck der Zuneigung und des Dankes der deutschen Mathematiker! Man wusste, wie nahe ich Zürich und Euch noch immer verbunden bin, unter denen ich die glücklichsten und besten Jahre meines Wirkens verbrachte. Ich war durch 17 Jahre ein Diener der Eidgenossenschaft, deren Bundesrat uns heute hier so warm begrüsst hat. Noch immer lasse ich mich – wenn Sie mir dieses Kompliment erlauben wollen, Herr Bundesrat Meyer – über die Weltereignisse, auch die meines eigenen Vaterlandes, durch die „Züri-Zitig" belehren[1]) An der ersten Sitzung, die der Vorbereitung dieses Kongresses diente, habe ich noch als Zürcher teilgenommen, so dass es etwa zum 10^{10}ten Teil Selbstlob ist, wenn ich unsere Schweizer Kollegen zu dem Gelingen dieser Tagung beglückwünsche.

Ich bitte die Gäste dieses Landes, durch Akklamation den folgenden Beschluss unserer Versammlung gutzuheissen: Die Schweiz und unsere gegenwärtigen Schweizer Freunde haben sich um die mathematische Wissenschaft verdient gemacht.

[1]) Der Angeredete war bis vor kurzem Chefredakteur der Neuen Zürcher Zeitung.

Parole pronunciate dal Presidente della delegazione Italiana, Francesco Severi, Professore, Roma

Signor Consigliere Federale; Signore; Signori!

Ho l'onore di arrecare al nobile Paese che ci ospita, al suo Governo ed ai matematici svizzeri, il saluto cordiale dell'Italia e del suo Governo, nonché quello di tutti i matematici di lingua italiana.

Abbiamo trascorso in queste ridenti contrade, largamente sorrise dalla natura, abbellite dalla grazia e dalla capacità organizzativa del Popolo, rese ancor più attraenti dal signorile senso di ospitalità svizzero, giornate deliziose, che non dimenticheremo, e che hanno contribuito a rendere molto meno gravosi i nostri lavori.

Come Italiano e come cultore della geometria algebrica, sento di dover quì ricordare con riverenza il nome di Jacob Steiner, il grande di Basilea, che fu uno dei fondatori della moderna geometria sintetica, ed i nomi di Wilhelm Fiedler e di Adolf Hurwitz, i quali illustrarono il Politecnico di Zurigo, ed arrecarono contributi di gran pregio all'indirizzo matematico, che più ci è caro.

Devo poi ricordare con particolare compiacimento che uno dei nostri, il Prof. Eugenio Togliatti, ha qui insegnato in fraterna intimità coi colleghi svizzeri, ed infine che, proprio nell'ambiente alto e sereno del Politecnico di Zurigo, si é compiuta nel 1915, per l'intervento di un vostro dotto geometra, il Prof. Grossmann, al quale inviamo i più cordiali auguri, la fusione fra il calcolo differenziale assoluto del Ricci e del Levi-Civita e la teoria della relatività di Alberto Einstein.

Noi Italiani abbiamo dunque più di un titolo spirituale, rinsaldato anche dalla lingua comune con una parte del vostro Popolo, all'intima amicizia con la Svizzera.

Ringrazio da parte dei matematici italiani gli organizzatori del riuscitissimo Congresso, che quì si è tenuto, ed in ispecial modo il nostro illustre ed infaticabile Presidente Prof. Fueter ed i solerti Segretarii.

Queste piante di cui, con atto delicato, si è circondato il tavolo dell'oratore, sono il simbolo della gentilezza dei nostri ospiti; il verde di queste palme è il simbolo della sempre viva speranza nella continuità dei progressi della scienza a cui abbiamo votato la vita; il rosso di questi fiori è il simbolo del calore della nostra gratitudine e dei nostri ringraziamenti per le accoglienze vostre.

Verlauf des Kongresses

Thee im Grand-Hôtel Dolder, Zürich. 11. September, 16 Uhr

Ansprache von Herrn Ständerat Dr. *Klöti*, Präsident der Stadt Zürich.

Ansprache von Herrn Prof. Dr. *Hamel*, Berlin-Charlottenburg.

Ansprache von Herrn Ständerat Dr. Emil Klöti, Stadtpräsident von Zürich

Sehr geehrte Damen und Herren!

Es mag etwas post festum erscheinen, wenn der Sprechende sich heute zum Worte meldet, um Sie in unserer Stadt, wo Sie schon seit einer Woche tagen und die zu verlassen Sie bereits im Begriffe sind, willkommen zu heissen. Es könnte fast scheinen, wir hätten uns erst noch besinnen müssen.

Davon ist natürlich keine Rede. Die Mathematiker sind ja überall so geachtete Wissenschafter und so harmlose Menschen, dass wir uns gar nicht vorstellen können, dass sie nicht überall willkommen wären. So haben wir uns denn auch nicht erst heute, sondern schon lange vor Eröffnung des Kongresses gefreut, eine so illustre internationale Gelehrtenversammlung, an der die prominentesten Vertreter fast aller Staaten und Kontinente teilnehmen, in unserer kleinen Stadt beherbergen zu dürfen.

Dass wir erst heute dazu kommen, dieser Freude Ausdruck zu geben, hat seinen Grund nur darin, dass die umsichtigen Organisatoren des Kongresses in geschickter Weise dafür sorgten, dass Sie, verehrte Anwesende, nicht zu viele offizielle Begrüssungsansprachen, die ja bekanntlich so kurzweilig sind, auf einmal über sich ergehen lassen mussten.

Ich bitte Sie also, den späten, aber nicht minder aufrichtigen Willkommgruss der Behörden und der Bevölkerung unserer Stadt entgegenzunehmen, und hoffe, dass es Ihnen in der verflossenen Woche vergönnt gewesen sei, in Zürich nicht nur nützliche, sondern auch schöne Tage zu verleben. Unsere Stadt hat sich bemüht, sich den verehrten Gästen in schönem September-Sonnenglanze zu zeigen, so dass wir hoffen dürfen, es sei ihr gelungen, Ihnen nicht nur durch ihre hohen Preise, sondern auch durch ihre landschaftliche Schönheit Respekt einzuflössen.

Es gibt zwar auch bei uns dann und wann Regentage; ich will aber deren jährliche Zahl diskret verschweigen, da ich nicht Gefahr laufen möchte, Sie durch Nennung einer Zahl aufs mathematische Gebiet abzulenken.

Diese Gefahr soll ja recht gross sein; hat doch der Berichterstatter einer hiesigen Zeitung geschrieben, Sie hätten am Ausflug nach Rapperswil vom letzten Dienstag sich ausschliesslich mit hochernsten mathematischen Problemen befasst und die schöne Umwelt keines Blickes gewürdigt, und Sie hätten in Rapperswil Tee getrunken „immer Formeln lösend und Theorien abwandelnd".

Das ist natürlich eine der bekannten journalistischen Übertreibungen. Hätte der Mann genauer beobachtet, so hätte er gewiss bemerkt, dass Ihnen die Schönheit des Zürichsees, die schon Goethe begeisterte, nicht entgangen ist, dass Sie es aber mit Raffinement verstanden haben, sich zwei Genüssen, dem Naturgenuss und dem Genuss geistreicher Unterhaltung, in geschickter Kombination hinzugeben.

Den meisten der verehrten Gäste ist es wohl kaum vergönnt gewesen, in den wenigen Kongresstagen auch die Bevölkerung Zürichs kennen zu lernen. Sie mögen sich wohl beim Anblick der Stadt und ihrer Umgebung gedacht haben, es müsse hier doch ein glückliches Völklein wohnen.

Bei näherer Berührung mit den Einwohnern wäre diese ideale Vorstellung aber wohl erschüttert worden. Gewiss ist Zürich keine hässliche und auch keine arme Stadt. Man zählt sie sogar zu den reichsten Städten der Erde, in der jeder Einwohner ein respektables durchschnittliches Vermögen besitzt. Aber Sie als Mathematiker wissen ja, was ein Durchschnitt bedeutet. Er kann sich bekanntlich aus sehr extremen Grössen zusammensetzen, immerhin darf gesagt werden, dass der Lebensstandard der unteren Volksklassen bei uns wesentlich höher ist als an manchen andern Orten. Ob er beibehalten werden kann, wird fraglich. Die Krisis, die unser Land lange verschont hat, greift von Tag zu Tag weiter um sich. Der Export, eine Existenznotwendigkeit unseres kleinen, der Rohstoffe entbehrenden Binnenlandes, schrumpft bedenklich zusammen. Die Zahl der Arbeitslosen, noch lange nicht so erschreckend wie in manchen andern Staaten, wächst mitten im Sommer von Monat zu Monat, und wir sehen mit Besorgnis dem kommenden Winter und dem nächsten Jahre mit ihrer Not und mit ihren Kämpfen gegen die Senkung des Lebensniveaus und um die Verteilung der Krisenlasten auf die einzelnen Volksschichten entgegen. So finden Sie denn in unserer Bevölkerung zurzeit mehr Unruhe und Unzufriedenheit als beschauliches Glück.

Bedauerlicherweise beschränkt sich die Abschliessung der einzelnen Staaten nicht nur auf das wirtschaftliche Gebiet, sie greift vielmehr auch auf das geistige Gebiet über. In dieser schwierigen Zeit ist es besonders wertvoll, wenn die einzelnen Wissenschaften ihren internationalen Charakter pflegen und stärken. Der Sprechende ist nicht in der Lage, die wissenschaftliche Ausbeute Ihres Kongresses zu würdigen. Aber der Wert internationaler Kongresse liegt, namentlich bei den exakten Wissenschaften, weniger in den Vorträgen, sondern vor allem in der Schaffung persönlichen Kontaktes und in der Pflege der Kollegialität unter den Vertretern der einzelnen

Wissenschaften, unbekümmert um die Verschiedenheit der Rasse und der Nationalität.

Ich hoffe und zweifle nicht daran, dass der seinem Ende entgegengehende Kongress dieser Aufgabe gerecht geworden ist und so mithilft, den Gedanken der Internationalität festzuhalten und zu verteidigen gegen die Strömungen, die die natürliche Liebe zur Heimat in hemmungslosen Nationalismus und Chauvinismus ausarten lassen wollen.

Gewiss bildet der internationale Zusammenhalt der Mathematiker hiegegen nur ein bescheidenes Gegengewicht. Wenn aber auch in andern Wissensgebieten dieser Geist der Universalität der Wissenschaft gepflegt wird, so können die Vertreter der Wissenschaft insgesamt doch einen wesentlichen Einfluss ausüben und dazu beitragen, dass wir bald wieder aus dieser unerfreulichen Epoche der nationalen Abschliessung herauskommen. Jede Gruppe, die in dieser Richtung tätig ist, verdient Anerkennung und Dank. Diesem Gefühle des Dankes gegenüber Ihrem Kongresse gestattet sich der Stadtrat dadurch symbolischen Ausdruck zu geben, dass er dem eminenten Vertreter der Vereinigten Staaten von Amerika, Herrn Professor Veblen, Princeton, dem hervorragenden Vertreter der deutschen Mathematiker, Herrn Professor Hilbert, Göttingen, und dem sehr verdienten Präsidenten des Organisationskomitees, Herrn Professor Fueter, Zürich, die Kunstmappe der Stadt Zürich überreicht.

Und nun, verehrte Damen und Herren, wünsche ich Ihrem Kongress noch einen harmonischen Abschluss und Ihnen allen eine glückliche Heimreise.

Mögen die Tage von Zürich bei Ihnen in guter Erinnerung bleiben und Sie ermuntern, uns gelegentlich wieder mit Ihrem Besuche zu beehren.

Ansprache von Herrn Prof. Dr. Hamel, Berlin-Charlottenburg

Sehr geehrter Herr Stadtpräsident, meine Damen und Herren!

Es ist mir von der Kongressleitung der ehrenvolle Auftrag geworden, Ihnen, Herr Stadtpräsident und der Stadt Zürich unseren herzlichen Dank auszusprechen, sowohl für die freundlichen Begrüssungsworte, die Sie uns gewidmet haben, als auch für die sonstigen Vergünstigungen, die die Stadt uns hat zuteil werden lassen. Ich habe nicht jeden der 800 Kongressisten um seine Zustimmung bitten können, dass ich für ihn mitspreche, ich hoffe aber doch, dass Sie alle einverstanden sind, wenn ich mich bemühe, unseren Dank so warm als irgend möglich abzustatten.

Zu einem wertvollen Bilde gehört ein schöner, passender Rahmen, zu einem Kongress, der uns wissenschaftlich und persönlich so bereichert hat, gehört eine entsprechende Stadt. Und wer wollte leugnen, dass Zürich geradezu eine ideale

Kongressstadt ist? Es ist eine Grossstadt mit allen Annehmlichkeiten einer solchen, aber es ist eine Stadt, die überall in engster Beziehung zur Natur steht: Allenthalben bietet sie dem Auge das Grün des Laubes, das schimmernde Grünblau des Sees, dazu die leuchtende Helle eines wunderbaren mitteleuropäischen Septembers. Die für uns Geistesarbeiter so notwendige Erholung war damit gegeben. Zürich ist auch eine Stadt, bei der man, wie ein Kind sagte, abends die Sterne sowohl über sich am Himmel wie auch unter sich sieht. Der Anblick Zürichs von seinen bewohnten Höhen aus ist bei Nacht ebenso bezaubernd wie bei Tag. Zürich ist eine Grossstadt, eine ungemein gewerbefleissige Stadt mit Hochhäusern und allem Modernen, das zu einer Grossstadt gehört. Aber es ist auch eine Stadt, die ein Grossmünster und Erinnerungen an Karl den Grossen besitzt und diese zu wahren und zu werten weiss. Zürich ist eine Grossstadt mit dem nun einmal dazu gehörenden Lärmen und Hasten, aber es ist auch eine Stadt der Hochschulen, der Geistesheroen Zwingli und Pestalozzi, und eine Stadt der Dichter, der Konrad Ferdinand Meyer und Gottfried Keller. Und auch Richard Wagner hat lange in ihr gelebt.

Wir haben das alles erfasst und in uns aufgenommen. Sie haben uns, Herr Präsident, das Kompliment gemacht, wir seien harmlose Leute und das weitere, wir seien raffinierte Leute, die auf einer Seefahrt Mathematik treiben und doch die Schönheit der Landschaft sehen. Mit dem sicheren Blick des Politikers haben Sie das scheinbar Gegensätzliche als Einheit richtig erkannt: Wir Mathematiker sind in der Tat raffiniert als Denker und Geniesser des Geistes, die das Schöne doch auch ausserhalb unserer Köpfe sehen; damit vereinigen wir die äussere Harmlosigkeit, die unsere Schutzhülle ist. Die Hälfte Ihres Komplimentes kann ich Ihnen zurückgeben. Vielleicht war es gerade besondere Raffiniertheit der Stadt, uns diesen schönen Nachmittag am Schlusse der Tagung zu geben. Denn unter dem Schönen, das auf uns Eindruck gemacht hat, hat das Letzte natürlich die grösste Aussicht, in uns haften zu bleiben. Aber seien Sie, Herr Präsident, versichert, dass es eines solchen Raffinements nicht bedürft hätte: Die schöne Stadt Zürich, das, was sie gewollt und ungewollt für uns getan hat, wird stets in lebendigster Assoziation mit allen anderen so wertvollen Eindrücken bleiben, die uns hier geworden sind. Empfangen Sie, Herr Präsident der Stadt Zürich und Ihre Stadt, unseren wärmsten und aufrichtigsten Dank!

Allgemeine Vorträge

Idealtheorie und Funktionentheorie

Von Rud. Fueter, Zürich

Einleitung

Meine Ausführungen beziehen sich in keiner Weise auf dasjenige Gebiet, das man als analytische Zahlentheorie zu bezeichnen pflegt. Ich will nur diejenigen Fragen berühren, in denen die *Begriffsbildung* der Idealtheorie entscheidenden Einfluss auf die Funktionentheorie gewonnen hat und sich diese beiden Disziplinen durchdringen, nicht aber diejenigen Fragenkomplexe, in denen funktionentheoretische *Methoden* ein heute unentbehrliches Hilfsmittel für die Lösung rein zahlentheoretischer Probleme sind.

Die Betrachtung diskreter Mannigfaltigkeiten dringt heute bis tief in die theoretische Physik; es scheint mir daher wohl gerechtfertigt, dem Kongresse zusammenhängend über die neuesten Arbeiten des genannten Zusammenhanges zu berichten. Ich werde hierbei nur die allgemein interessierenden Gedanken herausarbeiten, nicht aber auf die Beweise und Methoden eingehen.

Zunächst ist es höchst erstaunlich, dass die Theorie der analytischen Funktionen, die auf dem Begriffe der Stetigkeit aufgebaut sind, irgend eine Beziehung zum Begriffe des zahlentheoretischen Ideals, das auf der abzählbaren Menge der Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers fusst, haben kann. Es ist klar, dass eine solche Beziehung im allgemeinen nicht eintreten wird, sondern dass es sich nur um besondere Klassen von Funktionen handeln kann. Der Begriff, der in diesen besondern Fällen den Zusammenhang vermittelt, ist die *diskontinuierliche Gruppe*. Ich möchte drei verschiedene Arten, wie sich die Durchführung des Zusammenhanges gestaltet, unterscheiden:

1. Die eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen einer komplexen Variablen

Ist k ein algebraischer Körper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal desselben, so kann man bekanntlich $\mathfrak{a}$ als grössten gemeinsamen Teiler von zwei ganzen Zahlen ω_1, ω_2 von k ansehen. Jede andere Zahl von $\mathfrak{a}$ ist dann durch

$$\xi_1 \omega_1 + \xi_2 \omega_2$$

gegeben, wo ξ_1, ξ_2 alle ganzen Zahlen von k durchlaufen. Wird dasselbe $\mathfrak{a}$ durch ω_1', ω_2' definiert, so müssen die Verhältnisse

$$\vartheta = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \text{ und } \vartheta' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'}$$

durch eine unimodulare lineare Substitution mit ganzen Zahlen in k zusammenhängen. Dasselbe muss stattfinden, wenn zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ derselben *Idealklasse* angehören sollen. Nach *Hurwitz*[1]) gibt es daher ebenso viele Idealklassen, als es in k in bezug auf die Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen in k inäquivalente Zahlen gibt. Diese Gruppe entspringt aber nach einem andern Satze von *Hurwitz*[2]) aus endlich vielen Erzeugenden.

Machen wir jetzt folgende Annahmen:

A. *Jedes Ideal von k ist durch eine feste, genau definierte Zahl*

$$\vartheta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

gegeben;

B. *Es gibt eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe $\mathfrak{g}$ von unimodularen linearen Substitutionen, in bezug auf welche zwei Zahlen ϑ dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie zu Idealen derselben Idealklasse gehören;*

C. *Die Zahlen ϑ liegen im Diskontinuitätsbereich von $\mathfrak{g}$,*

so können wir eine zu $\mathfrak{g}$ gehörige automorphe Funktion $f(z)$ bilden.

Alle Funktionswerte $f(\vartheta)$ werden dann nicht von ϑ, sondern nur von der ϑ zugeordneten Idealklasse abhängen. *Es gibt ebenso viele verschiedene Werte $f(\vartheta)$, als es Idealklassen in k gibt.*

Diese Theorie ist bisher in folgenden Fällen durchgeführt worden:

a) *k ist der Körper k (1) der rationalen Zahlen.* $\mathfrak{g}$ besteht aus der durch $s = (z : z+1)$ erzeugten zyklischen Gruppe. Die automorphe Funktion $f(z)$ ist die Exponentialfunktion $e^{2\pi i z}$. Alle Ideale sind Hauptideale (n), n eine natürliche Zahl, und $f(z)$ hat für alle n denselben Wert 1.

Man kann mit Hilfe einer festen natürlichen Zahl f als *Führer* die Ideale von k (1) in feinere Idealklassen, nämlich in *Kongruenz-* oder *Strahlklassen* einteilen Die Idealklassenzahl ist jetzt grösser als eins. Den zu f teilerfremden Idealen werden die kleinsten positiven Reste (mod. f) eindeutig zugeordnet. $\mathfrak{g}$ ist die aus $s_f = (z : z+f)$ erzeugte zyklische Gruppe, und $f(z)$ ist die Exponentialfunktion $e^{\frac{2\pi i z}{f}}$. Diese Funktion nimmt so viele Werte an, als es Strahlklassen gibt; die Werte sind *die f-ten Einheitswurzeln.*

Diese Entwicklungsstufe der Theorie wird am besten durch die Entdeckungen

[1]) *A. Hurwitz,* Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse, 1895, S. 332.

[2]) Ebenda, S. 352.

von *Gauss-Dirichlet-Kummer* charakterisiert, worunter insbesondere das *Reziprozitätsgesetz* hervorzuheben ist. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Theorie der einfachperiodischen Funktionen und die Theorie des rationalen Zahlkörpers sich im Idealbegriff vollständig durchdringen. Zugleich ist $e^{2\pi i z}$ für jedes rationale z eine algebraische Zahl.

b) *k ist ein quadratisch-imaginärer Körper*[3]). Jedes Ideal von k kann eindeutig durch eine Zahl der Form:

$$\vartheta = \frac{c+\sqrt{m}}{a},\ a,\ c,\ m \text{ ganz rational, } m < 0,\ c^2 - m \equiv 0 \text{ (mod. } a),$$

charakterisiert werden. $\mathfrak{g}$ ist die Modulgruppe. Alle obigen Annahmen sind erfüllt. Die zugehörige automorphe Funktion ist die elliptische Modulfunktion, z. B. die vollständige Invariante $j\,(z)$. Setzen wir in ihr $z = \vartheta$, so wird $j\,(\vartheta)$ nicht von dem durch ϑ bedingten Ideal, sondern nur von seiner Idealklasse $\mathfrak{k}$ abhängen. Alle den Idealen von $\mathfrak{k}$ entsprechenden Werte ϑ ergeben denselben Funktionswert j. Man setzt:

$$j\,(\vartheta) = j(\mathfrak{k}).$$

Statt der gewöhnlichen Klasseneinteilung kann die feinere Einteilung in *Ringklassen* genommen werden, was dieselben Resultate ergibt.

Die Theorie ergibt wieder das Resultat, dass $j\,(z)$ für alle z, die Zahlen eines imaginären quadratischen Zahlkörpers sind, eine algebraische Zahl wird.

Nimmt man in k die noch feinere Klasseneinteilung in *Strahlklassen* nach einem Führer $\mathfrak{f}$, wo $\mathfrak{f}$ irgend ein Ideal von k ist, vor, so müssen als automorphe Funktionen die elliptischen Funktionen selbst hinzugenommen werden. Der Zusammenhang von Funktionentheorie und Idealtheorie tritt in neuartiger Form auf. Jede Idealklasse von k zerfällt in gleich viele Strahlklassen. Letztere wird daher einesteils durch eine Idealklasse, andernteils durch einen Rest (mod. $\mathfrak{f}$) gegeben. Wir nehmen ein Ideal $\mathfrak{w} = (\omega_1, \omega_2)$ der Idealklasse mit der Basis ω_1, ω_2, wo $J\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$ ist und wählen ω_1, ω_2 als die Perioden der elliptischen Funktion $\mathfrak{S}\,(z,\ \mathfrak{w})$ (die bis auf einen von z unabhängigen Faktor die Weierstrass'sche $\mathfrak{p}$-Funktion ist und die in bezug auf z, ω_1, ω_2 von nullter Dimension ist). Setzt man dann:

$$\mathfrak{S}\,(\mathfrak{f}\,z,\ \mathfrak{w}) = \mathfrak{S}\,(n\,(\mathfrak{f})\,z,\ \bar{\mathfrak{f}}\,\mathfrak{w}),\quad n\,(\mathfrak{f}) = \text{Norm von } \mathfrak{f},\ \bar{\mathfrak{f}} = \text{Konjugierte von } \mathfrak{f},$$

wo $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{f}$ teilerfremd seien, so gilt die *allgemeine Formel der komplexen Multiplikation:*

$$\mathfrak{S}\,(\mathfrak{f}\,z,\ \mathfrak{w}) = R\,(\mathfrak{S}\,(z,\ \mathfrak{w})),$$

wo $R(\ )$ eine rationale Funktion ist, deren Koeffizienten bestimmte algebra-

[3]) Siehe für den Fall 2: *Fueter*, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen, Teubner, Leipzig, I. Teil 1924, II. Teil 1927.

ische Zahlen sind[4]). Die Bezeichnung $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}z, \mathfrak{w})$ ist daher erlaubt, weil $\mathfrak{S}(\mathfrak{f}z, \mathfrak{w})$ wieder die Perioden ω_1, ω_2 besitzt und weil ihre Pole durch den Idealbruch $\mathfrak{z}\mathfrak{w}/\mathfrak{f}$ dargestellt werden können. Aus der angegebenen Formel folgt, dass $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}, \mathfrak{w}\right)$ nur von der betreffenden Strahlklasse $\mathfrak{k}_s$ abhängt, man also schreiben darf

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}, \mathfrak{w}\right) = \mathfrak{S}(\mathfrak{k}_s);$$

ferner dass $\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{w}}{\mathfrak{f}}, \mathfrak{w}\right)$ *algebraische* Zahlen sind.

Die durch die Verbindung von Idealtheorie und Funktionentheorie erhaltenen algebraischen Zahlkörper heissen *Klassen-* resp. *Strahlklassenkörper.*

c) Leider versagt diese Methode bisher in allen weiteren Fällen. Insbesondere muss sie versagen, falls k ein *reeller* Körper ist. Die Gruppe der unimodularen linearen ganzzahligen Substitutionen in k ist nicht mehr eigentlich diskontinuierlich. Schon *Hilbert* hat in seinen berühmten Problemen am Pariser Kongress[5]) als wichtigste Aufgabe hingestellt, die Theorie auch für diese Fälle durchzuführen. Er hat auch seinen Schülern den Weg gewiesen, wie zu verfahren sei. Ist k z. B. ein reeller quadratischer Körper, S eine lineare ganzzahlige unimodulare Substitution in k, $\bar{S}$ die zu S konjugierte, d. h. diejenige, in der alle Koeffizienten durch ihre in k konjugierten ersetzt sind, so heisse $f(z, \bar{z})$ eine Modulfunktion der zwei Variablen $z, \bar{z}$, wenn

$$f(Sz, \bar{S}\bar{z}) = f(z, \bar{z})$$

ist. Dazu kommen noch geeignete Annahmen über die Singularitäten.

Blumenthal[6]) hat diese Funktionen eingehend studiert und insbesondere den Satz bewiesen, dass sich alle Modulfunktionen durch ein endliches Basissystem darstellen lassen. Diese Funktionen sind die einfachsten Fälle der von *Emile Picard* aufgestellten *hyperabelschen Funktionen*[7]), die seither auch von *G. Humbert*[8]) weitgehend untersucht worden sind. Humbert hat den Fall der *singulären* Abelschen Funktionen definiert und untersucht und damit den allgemeinsten Fall der *kom-*

[4]) Siehe *Fueter*, Reziprozitätsgesetze in quadratisch-imaginären Körpern, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1927, 1. Mitteilung S. 336—346, 2. Mitteilung S. 427—445, und *Hasse*, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, J. reine angew. Math., Bd. 165, 1931, S. 64.

[5]) *Hilbert*, Mathematische Probleme. 12. Problem Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1900, S. 277.

[6]) *Blumenthal*, Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. Math. Ann., Bd. 56, S. 509 und Bd. 58, S. 497.

[7]) *E. Picard*, Sur une nouvelle généralisation des fonctions abéliennes. C. R. Acad. Sci., Paris t. 98, p. 665.

Sur les fonctions hyperabéliennes. J. de Liouville, 4e série, t. 1, 1885, pg. 87.

[8]) *G. Humbert*, Sur les fonctions abéliennes singulières. J. Math. pures appl., 5e série, t. 5, 6, 7, 9, 10 (1899—1904). Siehe auch *Oeuvres*, t. I., Paris, Gauthier-Villars. 1929, p. 31 und ff.

plexen Multiplikation gefunden. Ist (1, 0), (0, 1), (g, h), (h, g') das Periodensystem der Abelschen Funktionen zweier Variablen, so heissen letztere singulär, falls eine Relation erfüllt ist:

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

wo A, B, C, D, E ganze rationale Zahlen sind. Werden g, h, g' in dieser Relation passend durch zwei Hilfsgrössen $\xi, \bar{\xi}$ ausgedrückt, so werden die zu den *Abel*schen Funktionen gehörenden Modulfunktionen Funktionen von $\xi, \bar{\xi}$, welche zur Modulgruppe in dem reellen quadratischen Körper $k(\sqrt{B^2 - 4AC - 4DE})$ gehören. Die Zahlwerte $\xi, \bar{\xi}$, die aritmetisch interessant sind, ergeben sich aus den beiden Gleichungen:

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0,\ \bar{\alpha}\bar{\xi}^2 + \bar{\beta}\bar{\xi} + \bar{\gamma} = 0,\ J(\xi) > 0,$$

wo α, β, γ ganze Zahlen von k sind.

Hecke hat von dieser Theorie die Anwendung auf die Zahlentheorie in verschiedenen bedeutenden Arbeiten gebracht[9]). Aus seinen wichtigsten Untersuchungen interessieren uns hier folgende Resultate: Ist K der durch die eben genannten Gleichungen gegebene zu k relativquadratische Zahlkörper, wobei vorausgesetzt wird, dass der Körper $K(\xi, \bar{\xi}, k)$ vom 8. Grade ist, so gibt es in K ein bestimmtes Geschlecht in bezug auf k, dessen sämtliche Ideale in bezug auf k eine *Relativbasis* besitzen. Letzteres heisst folgendes: Ist $\mathfrak{A}$ ein Ideal jenes Geschlechtes, so gibt es in $\mathfrak{A}$ zwei Zahlen Ω_1, Ω_2, mit der Eigenschaft, dass alle übrigen Zahlen von $\mathfrak{A}$ durch:

$$a_1 \Omega_1 + a_2 \Omega_2$$

gegeben sind, falls a_1, a_2 alle ganzen Zahlen von k durchlaufen. Sind Ω_1, Ω_2 und Ω_1', Ω_2' zwei verschiedene Relativbasen desselben Ideals $\mathfrak{A}$, so ist Ω_2' / Ω_1' eine lineare Funktion mit ganzen Koeffizienten in k von Ω_2 / Ω_1 und einer Determinante, die eine (total) positive Einheit von k ist. Die Relativbasis wird stets so abgezählt, dass $J\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) > 0$ ist. Auch zwischen der Relativbasis eines andern Ideals der Idealklasse von $\mathfrak{A}$ und derjenigen von $\mathfrak{A}$ wird dieselbe Relation bestehen müssen. Damit ist der Zusammenhang zwischen Idealtheorie und Funktionentheorie, d. h. den Modulfunktionen gegeben. Setzt man in der Modulfunktion $f(z, \bar{z})$ für z den singulären Wert $\xi = \Omega_2 / \Omega_1$ ein, so sieht man, dass der Funktionswert nur von der

[9]) *E. Hecke*, Zur Theorie der Modulfunktionen von zwei Variablen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie, In.-Dissertation, Teubner, 1910. Abgedruckt in Math. Ann. Bd. 71, S. 1 unter dem Titel: Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. — Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen. Math. Ann. Bd. 74, 1913, S. 465.

Idealklasse von $\mathfrak{A}$ abhängt[10]). Auch hier kann man den Körper k durch einen *Ring* in k ersetzen.

d) Die bisher angegebenen Beziehungen zwischen Idealtheorie und Funktionentheorie haben für die Zahlentheorie die allergrössten Folgen gezeitigt, auf die ich ganz kurz aufmerksam machen möchte. Die wesentliche Erkenntnis, die sie brachten, ist, dass die den Idealklassen zugeordneten Funktionswerte algebraische Zahlen sind, die *einen algebraischen Körper, den Klassenkörper, festlegen, der sich rein arithmetisch definieren lässt.* Diese Erkenntnis verdanken wir *Hilbert*[11]). Damit entstand das Problem, für den funktionentheoretisch erhaltenen Klassenkörper den Existenzbeweis rein arithmetisch zu führen. Der Existenzsatz, der viel weiter geht als es bis heute die funktionentheoretische Methode leisten kann, ist für einen beliebigen Grundkörper von *Furtwängler*[12]), für einen beliebigen Strahl im Grundkörper in einer glänzenden Arbeit von *Takagi*[13]) bewiesen worden. Ganz neuerdings ist uns ein neuer einfacher Beweis von dem viel zu früh der Forschung entrissenen Franzosen *Herbrand*[14]) geschenkt worden.

Diese Theorie ist daher von so weitreichender Bedeutung, weil für die Klassenkörper der *Vollständigkeitssatz* gilt, der aussagt, dass jeder Klassenkörper durch eine im Grundkörper *Abelsche* Gleichung gegeben wird, und dass umgekehrt jede in einem Grundkörper Abelsche Gleichung in einem bestimmten Klassenkörper liegt. Dadurch wird die Theorie der Klassenkörper zugleich die *Theorie aller Abelschen Gleichungen in einem beliebigen Grundkörper.*

Im Klassenkörper wird jedes Ideal des Grundkörpers Hauptideal, wie *Furtwängler* und *Artin*[15]) bewiesen haben, ein Satz, dem *Herbrand* seine allgemeine Gestalt gegeben hat[16]).

[10]) In Wirklichkeit liegt noch eine Komplikation vor, insofern die den Idealen zugeordneten Zahlen äquivalent sind nach allen Substitutionen mit einer (total) positiven Einheit als Determinante, während die Modulfunktionen nur in bezug auf die unimodularen Substitutionen invariant sind. Da letztere Gruppe aber einen endlichen Index in bezug auf erstere hat, kann man leicht Modulfunktionen definieren, die auch in bezug auf die erweiterte Gruppe invariant sind.

[11]) *D. Hilbert,* Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1898, S. 370.

[12]) *Ph. Furtwängler,* Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers, Math. Ann. Bd. 63, 1906, S. 1.

[13]) *T. Takagi,* Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journal of the Coll. of Sc. Tokyo, Imp. Univers. vol. XLI, art. 9. Siehe hiezu auch den Bericht von *H. Hasse,* Jahresber. der D. M. V., Bd. 35 (1926, S. 1), Bd. 36 (1927, S. 233).

[14]) *Herbrand et Chevalley,* Nouvelle démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 193, p. 814.

Herbrand, Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux. Abhandlung Math. Seminar Hamburg Univ., Bd. 9, 1932, S. 84. Dieser Satz ist bereits 1905 in meiner Arbeit „Die Theorie der Zahlstrahlen", J, reine angew. Math., Bd. 130, S. 236 ausgesprochen worden, der Beweis ist aber nicht vollständig.

[15]) *Ph. Furtwängler,* Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Abhandlung Math. Seminar, Hamburg Univ., Bd. 7, 1929, S. 14.

[16]) siehe die zweite Abhandlung unter [14]).

Durch die Theorie des Klassenkörpers wird zugleich das alte Problem der *Reziprozitätsgesetze* völlig erledigt, wie *Artin* in einer sehr schönen Arbeit zeigte[17]).

2. Die Hecke'schen Modulformen.

In etwas anderer Weise ist von *E. Hecke* in einer Reihe hervorragender Arbeiten[18]) der Idealbegriff funktionentheoretisch verwertet worden. Seinen Entwicklungen liegt die Modulgruppe Γ, und speziell ihre Hauptkongruenzgruppe $n$ter Stufe $\Gamma(n)$ zu grunde. Zu ihrem Diskontinuitätsbereiche gehört eine Riemannsche Fläche, die ein algebraisches Gebilde festlegt. Die Frage der überall endlichen Integrale des letztern hängt in inniger und merkwürdiger Weise mit den Modulformen — 2ter Dimension zusammen. $F(\omega_1, \omega_2)$ heisst eine Modulform $-k$ter Dimension, wenn:

$$F(\lambda\,\omega_1,\ \lambda\,\omega_2) = \lambda^{-k} F(\omega_1, \omega_2),$$

$$F(a\,\omega_1 + b\,\omega_2,\ c\,\omega_1 + d\,\omega_2) = F(\omega_1, \omega_2),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \prec \Gamma(n).$$

Dazu kommen Festsetzungen über singuläre Stellen und das analytische Verhalten, die ich hier übergehe. Es entsteht das Problem, alle linear unabhängigen

[17]) *E. Artin*, Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Abhandlung Math. Seminar Hamburg Univ., Bd. 7 (1929, S. 46). Siehe auch den Bericht von *H. Hasse*, Jber. Deutsch. Math.Vereinig. VI. Band der Ergänzungsbände, 1930.

[18]) Von den verschiedenen Anwendungen der Idealtheorie auf die Funktionentheorie durch *Hecke* greife ich hier nur eine heraus. Weitere ausserordentlich tiefe Resultate, die für das algebraische Gebilde von $\Gamma(n)$ gelten, sind die Tatsachen, dass die Perioden mancher Integrale 1. Gattung im Klassenkörper von $k(\sqrt{-n_1})$ liegen, wo n_1 ein Teiler von n; dass die Perioden mancher Integrale 3. Gattungen mit Klassenzahlen zusammenhängen; und dass in der Gruppe der Integrale, welche durch die Automorphien des algebraischen Gebietes definiert ist, Klassenzahlen eine Rolle spielen. Siehe hiezu: *E. Hecke*, Analytische Funktionen und algebraische Zahlen. Abhandlung Math. Seminars Hamburg Univ., I. Teil, Band 1, 1922, S. 102, II. Teil, Band III, 1924, S. 213.

Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen 3. Gattung aus dem Gebiet der elliptischen Modulfunktion. Abhandlung math. Seminars Hamburg Univ., Band 4, 1925, S. 211.

Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Math. Annalen, Band 97, 1927, S. 210.

Über das Verhalten von $\sum_{(m,n)} e^{2\pi i \tau \frac{m^2 - 2n^2}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen, J. reine angew. Math., Bd. 157, S. 159.

Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper. Math. Zeitschr., Bd. 28, 1928, S. 708.

Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf die Funktionentheorie und Arithmetik. Abhandlung math. Seminars Hamburg Univ., Bd. 5, 1927, S. 199.

Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Abhandlung math. Seminar Hamburg Univ., Bd. 6, 1928, S. 235.

Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung bei Abbildungen, insbesondere in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Abhandlung math. Seminar Hamburg Univ., Bd. 8, 1930, S. 271.

Die Riemann'schen Periodenrelationen für die elliptischen Modulfunktionen. J. reine angew. Math., Bd. 167, S. 337 (1932).

Modulformen einer bestimmten Dimension anzugeben. Von den Hecke'schen Entdeckungen will ich eine herausgreifen, die sich auf die Dimension –1 erstreckt[19]). Es gelang ihm, neue Modulformen aufzustellen, die sich nicht durch die bekannten darstellen lassen; ohne allerdings die Frage beantworten zu können, ob damit *alle* Modulformen –1. Dimension erhalten werden.

Zur Definition dieser neuen Modulformen legt man einen reellen quadratischen Körper $k\,(\sqrt{D})$ mit der Diskriminante D zugrunde und setzt:

$$\vartheta\,(\tau;\ \varrho,\ \mathfrak{a},\ Q\sqrt{D}) = \Sigma_{(\mu)}\ sgn.\ \mu\ e^{2\pi i\,\frac{\tau\,|\mu\mu'|}{AQD}}$$

Hier ist $N\,(\mathfrak{a}) = A$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von k, Q eine natürliche Zahl, ϱ eine feste Zahl von $\mathfrak{a}$, μ' die Konjugierte von μ; die Summe ist über alle Zahlen μ von $\mathfrak{a}$ zu erstrecken, für die:

$$\mu \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}}$$

ist, wobei aber unter allen μ, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, nur je eines zu nehmen ist. Ausserdem ist $\mu\mu' > 0$ verlangt. Die Funktion ϑ hängt nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der *Idealklasse* von $\mathfrak{a}$ ab, wenn ϱ jeweils durch das betreffende Ideal der Klasse teilbar ist. In jedem Körper k gibt es unendlich viele nicht identisch verschwindende Funktionen ϑ. Wir betrachten nur solche. Setzt man jetzt $\tau = \omega_1/\omega_2$, so ist $\omega_2^{-1}\,\vartheta\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ eine Modulform –1ter Dimension der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma\,(QD)$. Sie ist eine reguläre analytische Funktion von τ in der obern Halbebene.

Für unseren Standpunkt ist die Art der Verwendung des Idealbegriffes interessant. Im Gegensatz zu den Ausführungen unter 1 wird der Idealbegriff direkt zur Definition der analytischen Funktion verwendet, *indem über bestimmte Zahlen eines Ideals summiert wird.* Die so erhaltenen Funktionen sind anderseits *notwendig* zur Theorie eines bestimmten algebraischen Gebildes. Während vorhin die Zahlentheorie durch die Funktionentheorie mächtig angeregt und unterstützt wurde, sehen wir hier umgekehrt, dass der Idealbegriff notwendig ist, um ein so grundlegendes Problem, wie die Aufstellung der Integrale 1. Gattung eines gegebenen algebraischen Gebildes, zu erledigen.

3. Die Picard'sche Gruppe.

Nicht nur der Fall, dass die die Ideale definierenden Zahlen reell sind, bereitet Schwierigkeiten, sondern auch der Fall, dass die Gruppe in der Ebene *uneigentlich diskontinuierlich* ist. Dies tritt schon für den Körper $k\,(\sqrt{-1})$ der *Gauss*'schen Imaginären ein. Wir werden uns im folgenden auf diesen Körper beschränken. Die zu-

[19]) siehe die dritte der unter [18]) genannten Arbeiten.

gehörige Gruppe ist die *Picard'sche Gruppe* [20]). Nach *Poincaré*[21]) besitzen solche Gruppen einen Diskontinuitätsraum. Man kann denselben durch lineare Substitutionen festlegen, wenn man an Stelle der komplexen Variablen die Quaternionenvariable

$$z = \sum_{k=0}^{3} x_k i_k$$

einführt, wobei etwa i_1 die imaginäre Einheit des Gauss'schen Körpers $k(i_1)$ der Substitutionen sei[22]). Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen von $k(i_1)$, die der Bedingung $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1$ genügen, so führen alle Abbildungen:

$$z' = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \beta)^{-1}, \text{ resp. } 'z = (z\gamma + \delta)^{-1}(z\alpha + \beta)$$

den Hyperraum in sich über, wobei der Diskontinuitätsraum in irgend einen andern Diskontinuitätsraum übergeht. Man kann mit Hilfe von verallgemeinerten Poincaré'schen Thetareihen Funktionen der Quaternionenvariablen z analytisch angeben, die invariant gegen solche linearen Substitutionen sind:

$$f((\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}) = f(z)$$[23]).

Diese Funktionen sind in *Hausdorf*'schem Sinne analytisch.

Es sei mir folgende Bemerkung gestattet. In letzter Zeit hat die Theorie der analytischen Funktionen zweier komplexen Variablen einen ungeahnten Aufschwung genommen. Diese vermitteln eine Abbildung des Hyperraumes, wobei *je zwei Dimensionsrichtungen* zusammengekoppelt sind. Im Gegensatz hiezu vermitteln die Funktionen einer Quaternionenvariablen eine Abbildung des Hyperraumes, bei der eine Dimension, die der reellen Einheit entspricht, gegenüber den drei andern gleichwertigen Richtungen ausgezeichnet ist. Von diesem Gesichtspunkt aus liegt kein Grund vor, die eine Funktionsklasse vor der andern zu bevorzugen.

In welcher Weise können diese Funktionen mit dem Idealbegriff in Beziehung gebracht werden? Den Zusammenhang bringt die *Idealtheorie der Algebren*. Nehmen wir den *Hurwitz*'schen maximalen Integritätsbereich der rationalen Quaternionen[24]). Die Idealklassenzahl ist in demselben eins. Definieren wir dagegen

[20]) *E. Picard*, Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan. Bull. soc. math. t. 12, 1883, p. 43 (Selecta, Cinqu. Scient. de M. E. Picard, 1928, p. 103).

[21]) *H. Poincaré*, Oeuvres, t. II. Paris, 1916, S. 258 u. ff.

[22]) *R. Fueter*, Sur les groupes improprement discontinus, C. R. Acad. Sci., Paris, t. 182. S. 432, 1926.

[23]) *R. Fueter*, Über automorphe Funktionen in bezug auf Gruppen, die in der Ebene uneigentlich diskontinuierlich sind. J. reine angew. Math., Bd. 157, 1927, S. 66.
Über automorphe Funktionen der Picard'schen Gruppe I, Comm. Math. Helv., Bd. 3, 1931, S. 42.
Analytische Funktionen einer Quaternionenvariablen, Comm. Math. Helv., Bd. 4, S. 9. 1932.

[24]) *A. Hurwitz*, Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Berlin, Springer, 1919, S. 23.

einen *Linksring* r (φ[25]) zu einer ganzen Zahl φ von $k\,(i_1)$ als Führer, d. h. nehmen alle Quaternionen:

$$\lambda + \Omega\,\varphi,\ \lambda \text{ in } k\,(i_1),\ \Omega \text{ rationales Quaternion,}$$

wo in den Nennern der Koordinaten von λ und Ω keine der Primzahlen der Norm $n\,(\varphi)$ auftreten dürfen, so kann man in ihm *Linksringideale* durch eine kanonische Basis relativ zu $k\,(i_1)$ definieren:

$$(\mathfrak{a}_r = (n\tau,\ (\iota + \varrho\varphi)\,\tau), \text{ wo } n\,(\iota + \varrho\,\varphi) \equiv 0 \pmod{n},\ \ \varrho = \tfrac{1}{2}\,(1 + i_1 + i_2 + i_3)$$

ist, d. h. Ringideale, deren Quaternionen sich alle in der Form:

$$\xi_1\,n\,\tau + \xi_2\,(\iota + \varrho\,\varphi)\,\tau$$

ausdrücken, falls ξ_1, ξ_2 alle ganzen Zahlen von $k\,(i_1)$ durchlaufen. Das Verhältnis der Basisgrössen $(\iota + \varrho\,\varphi)\,/n$ hat positive dritte und vierte Koordinaten. Verlangt man dasselbe von jeder Relativbasis, so erhält man alle Relativbasen durch die Anwendung der Substitutionen der Picard'schen Gruppe; ist nämlich (ω_1, ω_2) eine andere, so muss:

$$\omega_2\,\omega_1^{-1} = (\alpha\,\frac{\iota + \varrho\,\varphi}{n} + \beta)\,(\gamma\,\frac{\iota + \varrho\,\varphi}{n} + \delta)^{-1},\ \alpha\,\delta - \beta\,\gamma = 1,$$

$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ eine Substitution der Picard'schen Gruppe.

Genau dasselbe tritt ein, wenn ω_1, ω_2 die Relativbasis eines andern Ringideals derselben Ringidealklasse $\mathfrak{k}_r$ ist. Da nun $f\,(z)$ eine in bezug auf die Picard'sche Gruppe automorphe Funktion ist, so ist:

$$f\,(\omega_2\,\omega_1^{-1}) = f\,(\mathfrak{k}_r)$$

nicht vom Ideal $(\mathfrak{a}_r$, sondern nur von seiner Ringidealklasse $\mathfrak{k}_r$ abhängig. Es gibt daher so viele verschiedene Funktionswerte, wie es Ringidealklassen gibt in $r\,(\varphi$. Auch hier durchdringen sich Idealtheorie und Funktionen der Quaternionenvariablen vollständig.

Zum Schlusse möchte ich nochmals nachdrücklich darauf hinweisen, dass ursprünglich die Idealtheorie dank der Entdeckung der komplexen Multiplikation durch *Abel* die empfangende war; der letzteren verdankt sie ihren mächtigen Aufschwung der letzten Jahrzehnte. Dass aber heute umgekehrt, und darauf habe ich schon bei Besprechung der Hecke'schen Resultate kurz hingewiesen, die Idealtheorie der Funktionentheorie neue Probleme und Fragen stellt und ihr hilft, dieselben zu beantworten.

Zürich, 13. April 1932.

[25]) *Rud. Fueter,* Formes d'Hermite, groupe de Picard et Théorie des idéaux de quaternions. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 194, p. 2009. Eine ausführliche Darstellung wird demnächst in den Comm. Math. Helv., Bd. 5 erscheinen.

Über die analytischen Abbildungen von mehrdimensionalen Räumen

Von C. Carathéodory, München

1. Das Problem, das in meinem Vortrag behandelt werden soll, ist in den letzten Jahren durch viele verschiedene originelle Methoden vorwärts gebracht worden. Trotzdem gibt es noch ausserordentlich einfache Fragen, die man in diesem Zusammenhang stellen muss, und die noch in tiefsten Schatten liegen. Deshalb schien mir das Thema der analytischen Abbildungen geeignet zu sein, unsern Kongress zu beschäftigen und zu interessieren.

Es handelt sich um Folgendes: ein System von n komplexen Zahlen

$$x_j = x_j' + i\, x_j'' \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

wird als reeller Punkt im $2\,n$-dimensionalen Raum der $(x_1', x_1'', \ldots . x_n', x_n'')$ angesehen. Dann vermitteln n analytische, also komplexe Funktionen

$$y_i = f_i\,(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

eine Abbildung von zwei Punktmengen aufeinander, die beide in einem $2\,n$-dimensionalen Raum eingebettet sind. Dieses sind die mathematischen Gebilde, die uns heute beschäftigen sollen.

Dass es sich hier um ganz eigentümliche Abbildungen handelt, sieht man schon an den homogenen und linearen Transformationen dieser Art, die nur von $2\,n^2$ reellen Parametern abhängen, wo doch die allgemeinen linearen, homogenen Transformationen des $2\,n$-dimensionalen Raumes $4\,n^2$ Parameter enthalten.

Für $n = 1$ ist die durch (1.2) vermittelte Abbildung eine gewöhnliche konforme Abbildung, deren systematische Untersuchung seit 80 Jahren fast alle Fortschritte in der Theorie der analytischen Funktionen einer Veränderlichen vermittelt hat. Diese grossen Erfolge sind aber geeignet, die Tatsache zu verschleiern, dass unsere Fragestellung ausserordentlich künstlich ist, und dass es des Genies eines *Riemann* bedurfte, um ihr überhaupt in der allgemeinen Funktionentheorie Bürgerrecht zu verschaffen.

Deshalb ist es durchaus nicht sicher, dass der naheliegende Analogieschluss, der uns bewegt, analytische Abbildungen auch in mehrdimensionalen Räumen zu untersuchen, auf den besten Weg hinweist, der für das Studium der analytischen Funktionen am geeignetsten ist. Der Erfolg allein kann entscheiden, ob dieser Weg mit der wahren königlichen Strasse identisch ist, die bis ins Herz des zu entdeckenden

Landes führt. Vielleicht sind unsere Bemühungen in dieser Richtung ihrer ganzen Natur nach ungeeignet, etwas Dauerndes und Bleibendes für die Wissenschaft zu schaffen.

Dies soll uns aber nicht hindern, schon jetzt, an Hand der neuerdings gewonnenen Resultate, die Vorteile abzuwägen, die eine geometrische Behandlung der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen mit sich bringt. Mein Ziel ist, ein (allerdings sehr subjektives) Bild zu entwerfen, das bei der Lektüre der vielen wichtigen und schönen Arbeiten, die ich schon erwähnt habe, entstanden ist.

2. Wir müssen zunächst kurz an die Leistungen der geometrischen Funktionentheorie für analytische Funktionen einer Veränderlichen erinnern, und uns überlegen, welche Teile dieser Theorie auf mehrdimensionale Räume übertragbar sind.

Es sind besonders zwei Dinge, die ich hier besprechen möchte, nämlich die abstrakte Definition einer Riemannschen Fläche und das Grenzkreistheorem von *Poincaré* und *Koebe*.

3. Es war *Felix Klein*, der zuerst gelehrt hat, dass man die Riemannschen Flächen nicht nur durch ihre Projektion auf einer komplexen z-Ebene darstellen soll, sondern dass es vielfach zweckmässiger ist, sie, wie *Klein* selbst sich ausdrückte, „frei schwebend" im Raume zu betrachten. Diese noch sehr mangelhafte Vorstellung wurde am Anfang dieses Jahrhunderts durch *Wirtinger* aufgegriffen, aber erst im Jahre 1912 hat *H. Weyl* in seinem klassischen Buche: „Die Idee der Riemannschen Fläche" eine lückenlose Theorie für diese Dinge geliefert. Nach *Weyl* ist eine Riemannsche Fläche R eine beliebige topologische zweidimensionale Punktmenge, die folgende drei Eigenschaften besitzt: 1. sie ist triangulierbar; 2. jeder Punkt von R besitzt Umgebungen, die man konform auf das Innere eines Kreises abbilden kann; 3. die konformen Abbildungen von zwei sich überdeckenden Umgebungen sind miteinander konsistent.

Die Bedingung der Triangulierbarkeit kann selbstverständlich durch die andere ersetzt werden, dass man die Fläche R mit abzählbar vielen Umgebungen von Punkten überdecken kann, für welche die Bedingungen 2. und 3. gelten. Sie kann im allgemeinen nicht weggelassen werden, denn man kennt 2-dimensionale topologische Flächen, die nicht triangulierbar sind. *T. Radó* hat nun zwar gezeigt, dass die Eigenschaften 2. und 3., d.h. die konforme Abbildbarkeit im Kleinen, schon die Triangulierbarkeit zur Folge haben; der Beweis aber, den er dafür gegeben hat, lässt es als sehr zweifelhaft erscheinen, dass man diesen Satz auf mehrdimensionale Gebilde übertragen kann. Dies scheint daher eine Frage zu sein, die zu untersuchen sich lohnen dürfte.

4. Das Grenzkreistheorem von *Poincaré* und *Koebe* kann jetzt folgendermassen ausgesprochen werden: *es gibt nur drei wesentlich verschiedene, einfach zusammenhängende, zweidimensionale Riemannsche Flächen; die eine dieser Flächen kann man*

auf die Vollkugel, die zweite auf die ganze Zahlebene, die dritte aber auf das Innere eines Kreises konform abbilden.

Da nun jeder analytischen Funktion $f(z)$ eine Riemannsche Fläche zugeordnet werden kann, auf welcher $f(z)$ eindeutig ist, und da jede Riemannsche Fläche eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche besitzt, folgt hieraus bekanntlich, dass man jede beliebige analytische Funktion $w = f(z)$ mit allen ihren analytischen Fortsetzungen immer erhalten kann, indem man den Parameter t aus den Gleichungen

$$z = \varphi(t), \qquad w = \psi(t)$$

eliminiert, wobei φ und ψ meromorphe Funktionen bedeuten, also als Quotient von gewöhnlichen Potenzreihen dargestellt werden können.

Nachträglich zeigt sich also, dass solange man nur Funktionen $f(z)$ einer einzigen Variablen betrachtet, der Begriff der Riemannschen Fläche, wenigstens theoretisch, entbehrt werden kann, da man doch jede beliebige Funktion in ihrer Totalität mit Hilfe von (höchstens) vier Funktionselementen darzustellen imstande ist.

5. Der Begriff der abstrakten Riemannschen Fläche kann ohne weiteres für Funktionen von mehreren Veränderlichen entwickelt werden. Für das Folgende genügt es, Funktionen von zwei Veränderlichen

$$z = f(x, y) \tag{5.1}$$

zu betrachten, die auf einer vierdimensionalen Riemannschen Fläche eindeutig sind.

Wir führen nun, genau wie in der Gaussschen Flächentheorie, Parameter u und v ein, und stellen die Funktion (5.1) in der Umgebung eines ihrer Punkte durch drei Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v) \tag{5.2}$$

dar. Hierbei bedeuten φ, χ, ψ analytische Funktionselemente der komplexen Veränderlichen u, v, und es soll keine der drei Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(u, v)} \qquad \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(u, v)} \qquad \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(u, v)} \tag{5.3}$$

identisch verschwinden.

Auf diese Weise gewinnen wir ein Element der Riemannschen Fläche der Funktion (5.1) und wir rechnen auch zu den Punkten der Riemannschen Fläche, die wir durch analytische Fortsetzung erhalten, diejenigen algebraischen Verzweigungspunkte von (5·1) hinzu, deren Umgebung man durch ein Funktionssystem (5.2) uniformisieren kann.

Man muss aber bei Funktionen von mehreren Veränderlichen vorsichtig sein, weil auch wesentlich singuläre Stellen unter Umständen uniformisiert werden können.

Zum Beispiel ist die Funktion

$$z = \frac{y}{x} \tag{5.4}$$

im Punkte $x = y = o$ wesentlich singulär, weil sie in jeder Umgebung dieses Punktes jeden beliebigen Wert annehmen kann. Sie wird durch die Gleichungen

$$x = u, \qquad y = u\,v, \qquad z = v \tag{5.5}$$

uniformisiert; hier entsprechen aber dem *einen* Punkt $(x = y = o)$ die unendlich vielen Punkte ($u = o$, v willkürlich).

Bei der Uniformisierung im Kleinen kann man nun um diese letzten Singularitäten auszuschliessen, versuchen zu verlangen, dass jedem Punkte (u_0, v_0), der betrachtet wird, eine Umgebung U zugeordnet werden kann, so dass immer nur höchstens endlich viele Punkte von U einem und demselben Punkt (x, y) entsprechen.

Mit dieser Vorschrift müssten also beim Beispiel (5.5) alle Punkte ($u = o$, v willkürlich) als Randpunkte des Gebietes behandelt werden, in dem man die Variablen (u, v) betrachtet.

6. In diesem Zusammenhang muss man aber noch auf wirkliche Schwierigkeiten hinweisen, die ich durch ein fast triviales Beispiel illustrieren möchte.

Es sei $\varphi(t)$ regulär im Einheitskreis $|t| < 1$, dort sei $|\varphi(t)| < 1$ und der Kreis $|t| = 1$ sei eine natürliche Grenze für $\varphi(t)$. Dann ist die Funktion

$$g(u, v) = \varphi(u) + \varphi(v) \tag{6.1}$$

regulär und beschränkt im Dizylinder

$$|u| < 1, \qquad |v| < 1 \tag{6.2}$$

und jeder Randpunkt des Dizylinders ist ein wesentlich singulärer Punkt für $g(u, v)$. Durch die Transformation (5.5) geht nun die Funktion (6.1) über in

$$f(x, y) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6.3}$$

die im Gebiete

$$o < |x| < 1, \qquad |y| < |x| \tag{6.4}$$

regulär ist, und jeden Randpunkt dieses Gebietes als wesentlich singulären Punkt besitzt. Kehrt man nun zu den Parametern (u, v) zurück, so sieht man, dass der Existenzbereich von $f(x, y)$ nicht mehr der Dizylinder (6.2), sondern das mehrfach zusammenhängende Gebiet

$$o < |u| < 1, \qquad |v| < 1 \tag{6.5}$$

ist. Wir werden auf dieses Beispiel zurückkommen.

7. Um jetzt eine vierdimensionale abstrakte Riemannsche Fläche zu definieren,

betrachten wir eine Folge von endlich oder unendlich vielen ortsuniformisierenden Variablenpaaren (u_1, v_1), (u_2, v_2), ..., die in den Dizylindern

$$C^{(k)}: \quad |u_k| \leqq 1, \quad |v_k| \leqq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{7.1}$$

variieren sollen. Gewisse dieser Dizylinder sollen miteinander verkettet sein, so dass ihre Gesamtheit eine zusammenhängende Riemannsche Fläche bildet. Am einfachsten stellt man diese Verkettung mit Hilfe einer symmetrischen Matrix (ε_{ik}) dar, die wohl zuerst bei *Poincaré* vorkommt. In dieser unendlichen Matrix soll jedes Element entweder den Wert Null oder den Wert Eins haben, und zwar dann und nur dann den Wert Eins, wenn die Dizylinder $C^{(i)}$ und $C^{(k)}$ verkettet sind. In diesem Falle soll dann ein Funktionenpaar

$$u_i = \varphi_{ik}(u_k, v_k), \qquad v_i = \psi_{ik}(u_k, v_k) \tag{7.2}$$

von regulären analytischen Funktionen existieren, durch welche der Dizylinder $C^{(k)}$ eineindeutig und analytisch auf ein abgeschlossenes Gebiet des Raumes der (u_i, v_i) abgebildet wird, das mit dem Dizylinder $C^{(i)}$ gemeinsame innere Punkte besitzt. Ein Punkt $P^{(i)}$ dieses letzten Dizylinders auf welchen durch (7.2) ein Punkt $P^{(k)}$ des Dizylinders $C^{(k)}$ abgebildet worden ist, heisst zu $P^{(k)}$ äquivalent. Nun sollen die Funktionen φ_{ik}, ψ_{ik} so beschaffen sein, dass der eingeführte Äquivalenzbegriff symmetrisch und transitiv ist. In Formeln soll also aus $P^{(i)} \sim P^{(k)}$ folgen $P^{(k)} \sim P^{(i)}$ und zweitens soll aus $P^{(i)} \sim P^{(k)}$ und $P^{(k)} \sim P^{(m)}$ folgen $P^{(i)} \sim P^{(m)}$.

Von der Matrix (ε_{ik}) wollen wir noch verlangen, dass in jeder Zeile nur endlich viele Elemente von Null verschieden sind, und dass mindestens eins dieser Elemente unterhalb der Diagonale der Matrix vorkommt. Endlich sollen alle Randpunkte eines beliebigen Dizylinders $C^{(i)}$ mindestens einem inneren Punkt eines anderen Dizylinders äquivalent sein.

8. Wenn ein reguläres Funktionselement

$$f(P) = f(u_1, v_1)$$

das im Dizylinder $C^{(i)}$ längs eines jeden Weges auf der Riemannschen Fläche R fortsetzbar ist, so wollen wir sagen, dass die durch dieses Funktionselement erzeugte Funktion *zur Riemannschen Fläche gehört.* Für zweidimensionale Flächen, beweist man mit Hilfe von Sätzen aus der Theorie der konformen Abbildungen, die sich aber nicht auf mehrdimensionale analytische Abbildungen übertragen lassen, dass zu jeder abstrakten Riemannschen Fläche Funktionen konstruiert werden können, die zu dieser Fläche gehören. Die Übertragung dieses Satzes auf mehrdimensionale Räume scheint aber sehr zweifelhaft zu sein. Es wäre lehrreich, wenn man diesen Punkt endgültig aufklären könnte. Man kann aber in jedem Fall auch diesen Gordischen Knoten zerschneiden, indem man zu den schon geforderten Eigenschaften der vierdimensionalen Fläche R noch die weitere hinzufügt, dass mindestens zwei Funktionselemente $x(u_1, v_1)$ $y(u_1, v_1)$ existieren, die zu R gehören, und für welche die Funktionaldeterminante nicht identisch verschwindet.

Diese letzte Voraussetzung erlaubt insbesondere, die Fläche R auf den Raum des (x, y) zu projizieren, oder wie man zuweilen sagt, zu realisieren.

9. Zwei beliebige Riemannsche Flächen, die man eineindeutig und analytisch auf einander abbilden kann, sollen analytisch *äquivalent* heissen. Vom Standpunkt der Funktionentheorie sind sie nämlich nicht zu unterscheiden.

Wir wollen nun den Fall näher ins Auge fassen, dass eine zu einer Riemannschen Fläche R_1 äquivalente Fläche R'_1 mit einem Stück einer Fläche R_2 zusammenfalle. Im allgemeinen kann man mit dieser Beziehung nicht viel anfangen; gilt sie z. B. immer für jedes beliebige Paar von beschränkten Gebieten. Sie wird uns aber zu einem wichtigen Begriff führen.

Man weiss schon lange, nämlich seit den grundlegenden Untersuchungen von *Hartogs*, dass es Gebiete (also auch Riemannsche Flächen) gibt, die die Eigenschaft haben, dass jede analytische Funktion, die zu R gehört, von selbst auf eine Riemannsche Fläche $\bar{R}$ regulär ist, so dass R ein echtes Stück von $\bar{R}$ ist.

Hat nun die Riemannsche Fläche R'_1, die wir oben betrachtet haben, und die zu R_1 äquivalent sein sollte, die Eigenschaft, dass jede analytische Funktion, die zu R'_1 gehört, auch zu R_2 gehört, so wollen wir sagen, dass R_1 analytisch fortsetzbar ist, und dass R_2 eine analytische Fortsetzung von R_1 ist. Eine Riemannsche Fläche, die nicht fortsetzbar ist, soll *vollständig* genannt werden.

Der Begriff der vollständigen Riemannschen Flächen ist den Regularitätsbereichen nachgebildet, die Herr *P. Thullen* eingeführt und mit grossem Erfolg benutzt hat. Diese beiden Begriffe decken sich aber nicht vollkommen. Der Begriff der vollständigen Riemannschen Fläche scheint aber der naturgemässere zu sein. Hat doch Herr *Thullen* selbst gezeigt, dass es schlichte Gebiete gibt, deren Regularitätshülle nicht mehr schlicht ist.

Es ist nun klar, dass man nur mit vollständigen Riemannschen Flächen operieren soll und dass, wenn der Begriff der abstrakten mehrdimensionalen Riemannschen Fläche überhaupt einen Wert haben soll, man beweisen muss, dass jede beliebige Riemannsche Fläche vervollständigt werden kann.

Für die allgemeine Überlagerungsfläche einer Riemannschen Fläche scheint dies nicht allzuschwer zu sein, obgleich es nicht sicher ist, dass man den Beweis ohne Benutzung der Zahlen von der zweiten Cantorschen Zahlklasse wird zu Ende führen können.

10. Eine besonders wichtige Klasse von Riemannschen Flächen wird von denjenigen gebildet, die man auf ein *beschränktes* Gebilde des (x, y) Raumes projizieren kann. Im zweidimensionalen Fall besteht diese Klasse aus den Riemannschen Flächen,

deren Überlagerungsfläche auf das Innere eines Kreises konform abbildbar ist, und man kann ihnen bekanntlich – dies ist sogar der tiefere Sinn des Schwarzschen Lemmas – eine hyperbolische Metrik zuordnen.

Die vierdimensionalen Riemannschen Flächen, die soeben besprochen wurden, werden nun dadurch charakterisiert, dass mindestens zwei *beschränkte* Funktionen mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante existieren, die zur betrachteten Riemannschen Fläche gehören. Es ist dann bekanntlich sehr einfach, auch hier eine Metrik zu definieren, die mit Hilfe der Familie von beschränkten Funktionen, die zu R gehören, gewonnen wird.

11. Für die zuletzt betrachteten Riemannschen Flächen ist es natürlich, neben die Begriffe der Fortsetzbarkeit und Vollständigkeit, die wir oben erklärt haben, auch andere zu setzen, die dadurch entstehen, dass man nur *beschränkte* Funktionen zu ihrer Definition benutzt.

Schon bei zweidimensionalen Riemannschen Flächen, wird hierdurch die Klasse der vollständigen Riemannschen Flächen eingeengt: es kann jetzt eine Riemannsche Fläche unmöglich im zuletzt erwähnten Sinn vollständig sein, wenn in einem Blatte einer ihrer Projektionen ein isolierter Randpunkt enthalten ist. Im vierdimensionalen Raum kann der Unterschied der vollständigen Riemannschen Fläche mit dem Begriff des Regularitätsgebiets für beschränkte Funktionen an den einfachsten Beispielen demonstriert werden.

Im Paragraph 6 hatten wir eine beschränkte Funktion

$$f(x, y) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{11.1}$$

konstruiert, die im Gebiete

$$o < |x| < 1, \qquad |y| < |x| \tag{11.2}$$

regulär und in jedem Randpunkte dieses Gebietes wesentlich singulär war. Das Gebiet (11.2) ist also ein Regularitätsgebiet im Sinne von *Thullen*, auch wenn man nur beschränkte Funktionen zur Konkurrenz zulässt.

Wir sahen aber, dass dieses Gebiet eineindeutig auf die äquivalente Riemannsche Fläche

$$o < |u| < 1, \qquad |v| < 1 \tag{11.3}$$

abgebildet werden kann und es ist selbstverständlich, dass diese nicht vollständig im engeren Sinn ist.

Ein genaueres Studium derartiger Singularitäten scheint ausserordentlich wichtig zu sein. Unter diesem Gesichtspunkte wäre als einfachste Fragestellung der Satz zu prüfen, ob ein schlichter, beschränkter Regularitätsbereich vom Zusammenhange der Kugel immer als eindeutige Projektion einer vollständigen Riemannschen Fläche angesehen werden kann.

12. Ein brauchbares Kriterium, um in vielen Fällen zu entscheiden, ob eine gegebene Riemannsche Fläche, auf welcher eine analytische Metrik definiert ist, vollständig ist, entnehme ich aus einer demnächst erscheinenden Arbeit von Herrn *Horstmann*.

Herr *Horstmann* hat nämlich für Gebiete im Raume der (x, y), die keine Regularitätsgebiete sind, bewiesen, dass sie Randpunkte besitzen, die in endlicher metrischer Distanz von einem beliebigen inneren Punkte liegen; der Beweis überträgt sich wörtlich auf Randelemente von nicht vollständigen Riemannschen Flächen.

Hieraus folgt, dass jede Riemannsche Fläche R, auf welcher eine analytische Metrik definiert ist, vollständig ist, wenn die Distanzen $D_R(o, P_n)$ *immer gegen Unendlich konvergieren, falls man den Punkt o festhält, und die Punkte* P_n *irgendwie gegen ein Randelement konvergieren lässt.*

Für *einfach zusammenhängende, zweidimensionale* Riemannsche Flächen gilt auch die Umkehrung dieses Satzes. Vielleicht ist dies aber im vierdimensionalen Raum nicht mehr der Fall.

13. Um auf den zuletzt besprochenen Riemannschen Flächen Funktionen zu konstruieren, die in keinem Randelement fortsetzbar sind, kann man sich mit Vorteil einer Methode bedienen, die die Herren *Cartan* und *Thullen* in einer gemeinsamen Arbeit vor kurzem entwickelt haben.

Der wesentlichste Kunstgriff, der hierbei benutzt wird, besteht in einer interessanten Verallgemeinerung des Begriffes der Konvexität, die Herr *Cartan* erfunden hat.

Wir bemerken zuerst, dass, wenn K ein beliebiges konvexes Gebiet bedeutet, die konvexe Hülle $\bar{A}$ einer beliebigen abgeschlossenen Punktmenge A, die ganz im Innern von K liegt, ebenfalls in K enthalten ist. Ist dann P ein Punkt von K, der nicht zu $\bar{A}$ gehört, so gibt es immer mindestens eine lineare Funktion $L(A)$ der cartesischen Koordinaten der Punkte des Raumes, für welche

$$L(Q) < L(P)$$

ist, wenn Q die Punktmenge A beschreibt. Diese Eigenschaft ist für die Konvexität von K charakteristisch.

Nun sagt man nach *Cartan*, dass ein Gebiet G bezüglich einer gegebenen Klasse $\{f(x, y)\}$ von analytischen Funktionen konvex ist, wenn zu jeder abgeschlossenen Punktmenge A in G eine abgeschlossene Umgebung U_A von A derart zugeordnet werden kann, dass es zu jedem Punkt P von $(K—U_A)$ mindestens eine Funktion aus der gegebenen Klasse gibt, für welche

$$|f(Q)| < |f(P)|$$

ist, wenn Q die Punktmenge A beschreibt. Es ist nun fast selbstverständlich, dass unsere Riemannsche Fläche R konvex im Cartanschen Sinne sind, wenn man die beschränkten Funktionen, die zur Fläche gehören, zur Definition der Konvexität benutzt, und sich der elementarsten Eigenschaften der analytischen Metrik bedient.

Dann kann man ebenso wie *Cartan* und *Thullen* zu jeder Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$ auf R, die keinen Häufungspunkt im Innern von R besitzen, Funktionen konstruieren, die nicht identisch Null sind und in allen P_k verschwinden.

14. Die vorhergehenden Ausführungen sind in einem sehr engen Rahmen gehalten worden. Die grosse italienische Schule, die so viele Erfolge im Gebiete der analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen rechnen kann, durfte ich allerdings um so eher unerwähnt lassen, als wir am kommenden Freitag einen Vortrag von Herrn F. Severi über diesen Gegenstand zu gewärtigen haben.

Aber auch das berühmte Problem, das *Poincaré* gestellt hat, über die Äquivalenz von vierdimensionalen Gebieten vom Standpunkt der analytischen Abbildungen, habe ich unerwähnt gelassen, obgleich Herr *St. Bergmann*, der sich mit dieser Frage besonders beschäftigt hat, eine Reihe von kunstvollen und interessanten Arbeiten darüber geschrieben hat. Es ist wohl nur meine persönliche Einstellung, die mich verhindert hat, mich für dieses Problem zu interessieren. Ich habe nämlich den Eindruck, dass ebenso wie die Kenntnis der sechs Gaussschen Invarianten E, F, G, L, M, N für spezielle Probleme der Flächentheorie von kleinem Nutzen sind, ebenso die Auffindung aller unendlich vielen Invarianten, die die analytische Äquivalenz von vierdimensionalen Gebieten implizieren, nur theoretisches Interesse haben können.

Viel wichtiger, glaube ich, ist z. B. die Entscheidung der Frage, inwieweit man vierdimensionale Riemannsche Fläche uniformisieren kann; gibt es mit anderen Worten Kriterien allgemeiner Natur, aus denen man entscheiden kann, ob zu einer gegebenen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche analytisch äquivalente Flächen existieren, die schlicht auf den vierdimensionalen Raum ausgebreitet sind?

1. *W. Wirtinger*, Algebraische Funktionen und ihre Integrale. Enzykl. der Mathem. Wiss. Bd. II, 2, p. 115 (abgeschlossen 1901).
2. *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche (erste Auflage). Leipzig, Teubner, 1913.
3. *T. Radó*, Über den Begriff der Riemannschen Fläche. Acta Szeged. Bd. 2, p. 103.
4. *P. Thullen*, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die Regularitätshüllen. Math. Ann. 106 (1932), p. 64.
5. *C. Caratheodory*, Über das Schwarzsche Lemma bei analytischen Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 97 (1926), p. 76.
6. *H. Horstmann*, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Carathéodorische Metrik und Regularitätshüllen. (Münsterer Diss., erscheint in den Math. Ann.)
7. *H. Cartan* und *P. Thullen*, Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. Regularitäts- und Konvergenzbereiche. Math. Ann. 106 (1932), p. 617.

Essai sur le développement de la théorie des fonctions de variables complexes

Par Gaston Julia, Paris

En 1909, parlant au Congrès de Rome, *G. Darboux* disait: « Depuis une trentaine d'années, un changement profond s'est accompli sous nos yeux dans l'orientation des études mathématiques. La théorie des fonctions, puisqu'il faut l'appeler par son nom, attire aujourd'hui, avec une force irrésistible, les recherches des plus jeunes, des plus actifs, des plus inventifs parmi nous. Un esprit nouveau les anime: il nous a déjà valu, et nous promet plus encore pour l'avenir, de belles et profondément originales découvertes. »

Nous allons essayer, dans cette conférence, de fixer quelques étapes et de préciser quelques caractères du développement de cette théorie des fonctions dont *G. Darboux* relevait déjà la séduction. Dans des congrès antérieurs, des voix autorisées vous ont entretenus, à diverses reprises, des fonctions de variables réelles et du prodigieux renouvellement que leur étude a provoqué dans la science mathématique. Nous considérerons aujourd'hui les fonctions de variables complexes pour noter les progrès réalisés dans les problèmes qui les concernent. Sans entrer dans les détails que donnent les « Encyclopédies » et les « Mémoriaux », nous chercherons simplement à discerner les grandes phases de ce développement et les plus caractéristiques, pour en présenter une esquisse aussi nette et aussi complète que le permet le cadre de cette conférence.

* * *

Ce qui caractérise essentiellement les fonctions de variables complexes que l'on étudie, et les différencie des fonctions de variables réelles, c'est qu'elles sont parfaitement déterminées dans tout le domaine connexe où elles existent, dès qu'elles sont déterminées dans une partie arbitrairement petite de ce domaine. A cet égard, les fonctions envisagées par les analystes ont été, d'abord et pendant longtemps, uniquement des fonctions monogènes et analytiques d'une ou de plusieurs variables. La théorie de ces fonctions, assise d'abord par *Cauchy*, sur les notions de *monogénéité* (dérivée unique) et *d'intégrale définie*, a été assise ensuite par *Weierstrass* sur *la série de Taylor* et *le prolongement analytique*. L'équivalence n'était cependant pas parfaite comme on l'a cru longtemps, la différence des deux points de vue correspondant à une différence très profonde dans les domaines où il est possible de définir les fonctions monogènes. La révélation de cette différence est l'œuvre, récente, de M. *Borel*, qui réussit il y a vingt ans à dégager nettement la notion générale de fonction monogène de *Cauchy*, qu'on peut définir dans un domaine C ou domaine de *Cauchy*, de la notion plus restrictive de fonction analytique, qu'on peut définir dans un domaine moins général, domaine W ou de *Weierstrass*. Nous examinerons donc: d'une part, les fonctions *monogènes analytiques* d'une ou de plusieurs variables; d'autre part, les fonctions monogènes non-analytiques qu'on appelle aujourd'hui fonctions *quasi-analytiques*, ces dernières constituant, entre les fonctions analytiques et les fonctions de variables réelles, une bande étroite où les études, bien que fort attachantes, sont jusqu'ici assez restreintes. Et nous distinguerons en gros trois périodes, la première allant de *Cauchy* aux environs de 1880, la seconde allant aux environs de 1900, la troisième allant jusqu'aux recherches contemporaines.

PREMIÈRE PÉRIODE

Cauchy se préoccupe surtout de poser les principes de sa théorie, de créer les méthodes fondamentales (*intégrale de Cauchy, calcul des limites ou méthode des majorantes, méthode d'approximation dite de Cauchy-Lipschitz*) par lesquelles elle se développera, et de les appliquer aux principaux problèmes de l'Analyse: calcul des fonctions implicites, intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles; il établit ce que nous appelons les *théorèmes d'existence locaux*. Mais il commence l'étude des *points singuliers* (pôles, résidus), calcule le rayon de convergence de la série de Taylor et emploie déjà le prolongement analytique pour les équations différentielles.

Succédant à *Cauchy*, et fidèles à son point de vue, *Puiseux*, *Briot* et *Bouquet*, *Hermite* portent leurs efforts sur les *fonctions algébriques*, étudiées pour *toutes les valeurs de la variable*, leurs points singuliers critiques ou non, leurs intégrales et leur périodicité, les transcendantes périodiques provenant de l'inversion des différentielles algébriques (*fonctions elliptiques ou abéliennes*), sur le rôle de ces transcendantes dans la théorie des équations différentielles ou l'Arithmétique, en même temps qu'ils amorcent l'étude locale des *points singuliers des intégrales* des équations différentielles.

Ailleurs, suivant des orientations et utilisant des méthodes différentes, *Riemann*, *Weierstrass* et leurs émules ou élèves (*Clebsch*, *Neumann*, *Schwarz*, *Klein*) poursuivent l'étude des mêmes *problèmes algébriques*, tandis que *Fuchs*, se rattachant plutôt à l'école de *Cauchy*, étudie les points singuliers les plus simples des équations différentielles, en particulier les permutations des intégrales des équations linéaires par des circuits autour des points singuliers.

Cédant à leurs efforts répétés le monde algébrique fait apparaître des possibilités nouvelles qui enrichissent l'objet de la théorie des fonctions et l'ensemble de ses méthodes.

Les notions de points critiques, de lacets, celle, si importante, de périodicité, éclairent la notion de fonction multiforme tandis que, par les surfaces à plusieurs feuillets de *Riemann*, ces notions deviennent plus intuitives et familières. La connaissance de plus en plus précise du monde algébrique soulève des problèmes intéressants comme la *représentation paramétrique des courbes algébriques*, déjà résolue pour les genres zéro et un. Conjugué avec les recherches de *Briot* et *Bouquet*, de *Fuchs*, *Schwarz* et *Jordan* sur l'inversion des différentielles algébriques et sur les équations différentielles, cet ensemble devait aboutir à la théorie de *l'uniformisation* qui sera un des thèmes principaux de recherches dans la période suivante.

Par la théorie des fonctions elliptiques, les *points singuliers essentiels* isolés montrent déjà leur complexité et *Weierstrass* commence l'étude de ces points. Les *lignes singulières* lui apparaissent aussi et il fournit la première série de *Taylor* admettant pour coupure son cercle de convergence tandis que, venant de l'Arithmétique, par ses études sur la fonction modulaire, *Hermite* découvre lui aussi ces lignes singulières dont la nature apparaîtra plus clairement dans les travaux de *Schwarz* et dans les fonctions fuchsiennes de *Poincaré*.

La théorie des fonctions s'élève de problèmes *locaux* à des problèmes *généraux* dont certains, les problèmes algébriques, sont déjà plus ou moins résolus: étude dans tout le domaine d'existence, recherche de ses frontières et des singularités, étude des fonctions au voisinage des singularités, et *Weierstrass* ébauche une synthèse d'une logique très satisfaisante, basée sur la série de *Taylor*, les éléments de fonction analytique, le prolongement analytique, fondus dans la notion de domaine d'existence W défini avec précision. Dans l'intérieur de ce domaine on cherche des *représentations analytiques* (séries, produits infinis, intégrales) valables dans des régions de plus en plus étendues (théorèmes de *Weierstrass* et de *Mittag-Leffler*); la série de *Taylor* joue toujours un rôle prépondérant, mais les séries de fractions rationnelles interviennent déjà dans les fonctions elliptiques telles que les présente *Weierstrass*, et les séries thêta à une ou plusieurs variables, étudiées par *Jacobi*, *Hermite*, *Weierstrass* et *Riemann* mettent entre les mains des analystes des représentations analytiques nouvelles souples et précises.

Un enrichissement parallèle s'observe dans les méthodes. Déjà *Riemann* avait, dans la définition des fonctions analytiques, souligné le rôle des deux équations différentielles classiques de *Cauchy* pour l'existence d'une dérivée unique et ramené l'étude des fonctions analytiques de $z = x + iy$ à celle des fonctions harmoniques réelles de x et y. Par sa théorie des surfaces de *Riemann* et de leur connexion il fait jouer un rôle fondamental à cette *topologie* dont le rôle, grâce aux beaux travaux de *Jordan*, ne fera que grandir. Par l'introduction du *genre* des surfaces de *Riemann* algébriques, il fait apparaître le véritable rôle de l'invariant d'*Abel*. Par l'introduction des *substitutions birationnelles*, il *classe* les courbes algébriques à l'aide du nombre minimum de paramètres, les *modules*. Par ses recherches sur le problème de *Dirichlet* et sur la *représentation conforme*, il fournira des éléments fondamentaux à la théorie de l'uniformisation. Ce qu'ici ses démonstrations ont d'insuffisant, *Weierstrass* le montre par une critique lucide et créatrice. *Neumann, Schwarz* donnent alors des solutions rigoureuses de ces problèmes sous des hypothèses convenables relatives aux frontières du domaine, ils étendent ensuite ces solutions aux théorèmes d'existence sur une surface de *Riemann* algébrique donnée à priori.

Pendant que les disciples de *Cauchy*, de *Riemann*, de *Weierstrass* continuent d'explorer le domaine algébrique, pendant que *Fuchs*, *Schwarz* et *Jordan* après *Briot* et *Bouquet* rapprochent ce domaine des équations différentielles par leurs travaux sur les intégrales uniformes des équations du premier ordre, sur l'inversion uniforme du rapport de deux intégrales d'une équation linéaire du second ordre, sur les équations linéaires du second ordre à coefficients rationnels et intégrale algébrique, se forment dans les pépinières de l'Ecole Polytechnique et de l'Ecole Normale Supérieure de Paris des hommes qui vont répondre à plusieurs des questions ouvertes, puis donner un nouvel essor à la théorie des fonctions.

DEUXIÈME PÉRIODE

1° Les fonctions entières

Weierstrass avait commencé l'étude des transcendantes uniformes d'une variable les plus simples, les fonctions entières, et, par sa décomposition en facteurs primaires, donné une représentation commode mettant bien en évidence les zéros de la fonction. Il avait montré qu'une fonction entière approche indéfiniment toute valeur au voisinage du point singulier essentiel laissant pendante la question des valeurs effectivement prises. En 1879, s'appuyant sur la fonction modulaire qu'il connaît bien par ses études antérieures, M. *Picard* démontre les deux célèbres théorèmes qui tranchent la question précédente: « théorèmes révélateurs, dit M. *Painlevé*, qui, tels deux caps d'un continent inconnu découverts par quelques hardis navigateurs, font pressentir un monde mystérieux, monde si vaste et si riche que cinquante années d'exploration n'en ont pas encore épuisé les secrets. »

La théorie des fonctions entières reçoit par cette découverte une prodigieuse impulsion. *Laguerre* introduit la notion de *genre*, *Poincaré* établit une relation entre la *croissance du module maximum* $M(r)$ (ordre apparent) et d'une part le genre, d'autre part l'*allure asymptotique des coefficients de Taylor*. Puis M. *Hadamard* montre que la croissance de $M(r)$ renseigne sur l'*allure des modules des zéros* et il établit pour $M(r)$ une *borne inférieure* très précieuse, sur des cercles de rayon indéfiniment croissant: il conclut en établissant que la fonction $\xi(t)$ de *Riemann* est de genre zéro. M. *Borel* enfin donne la première *démonstration élémentaire* du théorème de M. *Picard* et, dans son mémoire fondamental sur les zéros des fonctions entières, assied la technique de ces fonctions sur les bases définitives, où nous la trouvons aujourd'hui: introduction et rôle de l'*ordre réel,* sa relation avec la *croissance de $M(r)$*, *classification des fonctions* d'après cette croissance, relation de $M(r)$ avec *le plus grand terme* de la série de Taylor, *méthode d'exclusion* ..., tels sont les principes que les *Lindelöf*, les *Boutroux*, les *Wiman* développeront et préciseront dans tous leurs détails. La théorie des fonctions entières est un des premiers exemples réussis d'étude dans tout le domaine d'existence.

2° Les fonctions automorphes. L'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques d'une variable

Le monde algébrique va subir de nouveaux assauts.

Par sa découverte des *groupes fuchsiens ou kleinéens,* et des fonctions uniformes invariantes par les substitutions de ces groupes, *Poincaré* établit l'existence de *représentations paramétriques de toutes les courbes algébriques,* dont *Klein* d'autre part avait établi la possibilité dans des cas spéciaux; *l'uniformisation des fonctions algébriques d'une variable* est ainsi réalisée, et *Poincaré* donne une représentation conforme sur un polygone plan de la surface de *Riemann* de ces fonctions. Il intègre en passant toutes les équations linéaires à coefficients algébriques dont les points singuliers sont assez simples: il donne une généralisation surprenante de la théorie des fonctions elliptiques et des exemples naturels et instructifs de ces lignes singulières que *Weierstrass* et *Hermite* avaient rencontrées. Les *fonctions fuchsiennes ou kleinéennes* sont un autre exemple d'étude réussie dans tout le domaine d'existence; elles montrent les particularités curieuses que peut présenter ce domaine: frontières régulières ou courbes de *Jordan* sans courbure ou ensembles parfaits discontinus du type *Schottky*, etc.

Peu après, et sauf une lacune qu'il comblera ensuite, *Poincaré* uniformise *toutes les fonctions analytiques*, donnant le premier exemple d'une spéculation hardie sur les surfaces de *Riemann* à une infinité de feuillets. Il ne perdra pas de vue ce sujet et il reviendra plus tard à des questions connexes, comme le problème de *Dirichlet*, en créant cette originale « *méthode du balayage* » qu'il utilisera, pour établir la représentation conforme des surfaces de *Riemann* simplement connexes sur des cercles de rayon fini ou infini, dans son célèbre mémoire des Acta où l'uniformisation des fonctions analytiques se trouve acquise sans restriction.

Par ailleurs, en utilisant sa belle méthode d'approximations successives, M. *Picard*, par intégration de $\Delta u = k e^u$ $(k > 0)$, apporte des contributions précieuses à la résolution d'importants problèmes d'existence sur les fonctions automorphes.

Cet ensemble de découvertes admirables, complété par les recherches des *Appell*, des *Goursat*, des *Humbert*, des *Painlevé*, des *Klein*, des *Fricke*, des *Hurwitz*. . ., achèvera de nous rendre familières les courbes algébriques, leurs représentations paramétriques, leurs surfaces de *Riemann* et leurs représentations planes, tandis que le problème de la *représentation conforme des aires multiplement connexes* recevra de M. *Schottky* des solutions intéressantes qui le feront rentrer dans le cycle des problèmes algébriques.

3⁰ Les fonctions algébriques de deux variables

M. *Picard* s'attaque aux fonctions algébriques de deux variables. Avec ses *groupes hyperabéliens, hyperfuchsiens, hyperkleinéens* et les fonctions qu'ils laissent invariantes, il pénètre plus avant dans ce monde des fonctions analytiques de plusieurs variables desquelles on sait encore si peu de chose en dehors des problèmes locaux.

On n'avait alors que des renseignements généraux très réduits: les théorèmes de *Cauchy*, de *Weierstrass* puis de *Hurwitz* sur les fonctions implicites ou les fonctions rationnelles. Mais les fonctions abéliennes fournissaient une base de départ analogue aux fonctions elliptiques pour une variable. C'est de cette base, améliorée d'abord par de nombreux travaux, que M. *Picard* partira pour étudier ses fonctions hyperfuchsiennes, hyperkleinéennes . . .

Avec *Poincaré* il démontre la *nécessité d'une relation quadratique* entre les périodes des fonctions quadruplement périodiques. Et, tandis que, par une analyse d'une étonnante hardiesse où se révèlent les difficultés du problème de *Dirichlet* à deux variables complexes, *Poincaré* établit, pour les fonctions méromorphes de deux variables, la *représentation par un quotient de deux fonctions entières*, et, plus tard, étendra aux intégrales doubles la *théorie des résidus* de *Cauchy*, M. *Picard*, par une analyse pénétrante et féconde, fonde la théorie moderne des fonctions algébriques de deux variables. Il leur découvre des caractères profonds et sans équivalent dans les fonctions algébriques d'une variable, notamment le rôle des *intégrales de différentielles totales algébriques de première ou deuxième espèce* qu'une surface algébrique ayant suffisamment de singularités (surface irrégulière) peut seule posséder; il caractérise par un entier $\varrho \geq 1$ le nombre des *courbes logarithmiques possibles des intégrales de troisième espèce*, il introduit le *genre géométrique*, nombre des *intégrales doubles de première espèce*, calcule le nombre des intégrales doubles de *deuxième espèce* et de leurs périodes distinctes . . .

Par ces principes qu'*Humbert*, MM. *Painlevé*, *Garnier* en France, MM. *Castel-*

nuovo, *Enriques*, *Severi* et leurs élèves en Italie, développeront, complèteront, préciseront, M. *Picard* nous a introduits au cœur des fonctions algébriques de deux variables, et, par ses travaux sur les fonctions hyperfuchsiennes, il a tenté sur le problème difficile d'uniformisation de ces fonctions l'essai que permettaient les difficultés de la topologie des espaces supérieurs.

4° Les intégrales des équations différentielles algébriques

En fidèles disciples de *Cauchy*, les deux grands géomètres français dont nous venons d'indiquer quelques œuvres maîtresses ne séparaient pas la théorie générale des fonctions de celle des équations différentielles à variables complexes, cette dernière étant pour eux un chapitre fondamental de la première. Après eux, la théorie des fonctions algébriques est achevée dans ses grandes lignes. Mais, comme il fallait s'y attendre, ils ont sur les équations différentielles algébriques posé de nouveaux problèmes dont M. *Painlevé*, animé du même esprit, va poursuivre l'étude.

Dans sa thèse, approfondissant la notion de prolongement analytique, il affermit ses connaissances (et les nôtres) sur les domaines d'existence des fonctions générales et leur représentation analytique dans ces domaines; puis, les fonctions algébriques désormais bien connues, il explorera les *intégrales des équations différentielles algébriques* pour déterminer leurs singularités, leur domaine d'existence, leur uniformité ou multiformité, leurs représentations analytiques. Pendant dix années d'un labeur soutenu il s'attachera à ces problèmes difficiles: prospecteur hardi et perspicace, très informé aussi des plus récents progrès de la théorie des fonctions, créant des méthodes originales et fécondes lorsqu'il ne peut utiliser celles qu'il tient de ses prédécesseurs, il progressera sur ce « continent inconnu » dont au jubilé de son ancien maître il a parlé en termes si émouvants. Considérant d'abord les équations du premier ordre, c'est *en fonction* de la *constante d'intégration* qu'il étudie leurs intégrales; chemin faisant il ajoute des théorèmes à la théorie des fonctions algébriques, notamment sur les transformations simplement rationnelles; et cherchant comment les singularités des intégrales dépendent de la constante d'intégration, il obtient ses premiers résultats. Mais c'est dans l'étude des équations d'ordre supérieur qu'il rencontre les plus grandes difficultés: s'attaquant au problème fondamental, il crée une méthode permettant de former toutes les équations dont les intégrales ont des *points critiques fixes* qu'on peut déterminer sans intégration à partir de l'équation elle-même. Déterminant effectivement ces équations pour l'ordre deux, en particulier celles dont l'intégrale est uniforme ou n'a qu'un nombre fini de branches, il en découvre de remarquables dont l'intégrale générale est une fonction entière ou méromorphe, irréductible aux transcendantes connues, et possédant des propriétés asymptotiques curieuses découvertes par *P. Boutroux*. La même méthode sera plus tard appliquée aux équations d'ordre supérieur par ses élèves *Boutroux, Chazy, Garnier.* En signalant enfin l'inversion par des fonctions uniformes d'un système de deux différentielles totales algébriques de deux variables qui se rattachent aux études de M. *Picard*, nous aurons donné quelque idée des succès que, grâce à M. *Painlevé*, la théorie des fonctions vérifiant une équation différentielle algébrique aura enregistrés sur un des plus difficiles terrains de recherche qui se soient rencontrés jusqu'ici.

5° Le prolongement analytique

1° Etude d'une fonction à partir de données relatives à un point d'holomorphie

Dans les paragraphes précédents nous avons vu la théorie des fonctions progresser vers des problèmes de plus en plus généraux, sur les terrains que l'expérience et l'intuition révélaient peu à peu aux analystes: fonctions algébriques et leurs intégrales, fonctions uniformes (elliptiques, automorphes), possédant des propriétés connexes d'invariance ou de périodicité très simples permettant l'étude du domaine d'existence tout entier et de l'allure aux frontières; fonctions uniformes (entières ou méromorphes) n'ayant qu'un point singulier essentiel; fonctions satisfaisant à des équations différentielles algébriques où la détermination du domaine d'existence et des propriétés sont beaucoup plus difficiles. Chemin faisant, sous l'empire de la nécessité et parce que les problèmes particuliers bien posés sont un facteur essentiel de progrès, des moyens techniques (surfaces de *Riemann*, *polygone fondamental*, ...) et des représentations analytiques de plus en plus puissants et appropriés à leur objet (séries de polynomes, de fractions rationnelles, séries thêta, produits infinis, séries de *Weierstrass* et de *Mittag-Leffler*) étaient créés à côté de cette série de Taylor qui, *pouvant convenir à toutes les fonctions analytiques*, se trouvait par là même impropre aux études particulières citées plus haut.

Sous l'influence des progrès ainsi réalisés, nous allons voir grandir le nombre et l'importance d'études consacrées comme la théorie des fonctions entières ou méromorphes à des classes très générales de fonctions, surtout de fonctions uniformes (auxquelles se ramènent les multiformes par l'uniformisation), satisfaisant à des conditions de plus en plus larges, et définies par des moyens de plus en plus variés. Accompagnant la marche parallèle de la théorie des fonctions de variable réelle, la théorie des fonctions de variable complexe devient avare d'hypothèses à priori (voir par exemple la démonstration de M. *Goursat* pour le théorème de *Cauchy*, où seule l'existence d'une dérivée est supposée); l'étude minutieuse des conséquences qu'entraînent de strictes hypothèses voit se révéler une quantité de possibilités nouvelles, tandis que se développe l'étude serrée des représentations analytiques, de leurs domaines de validité, des propriétés de la fonction déduites de ces représentations et des possibilités de représentation des fonctions dans tout leur domaine d'existence.

a) *Les singularités d'une fonction déduites de sa série de Taylor*

La plus ancienne de ces représentations est la série de *Taylor* dont *Cauchy*, à partir de son intégrale, établit l'existence et détermine le domaine de validité. En calculant à partir des coefficients le rayon du cercle de convergence, *Cauchy* donnait la distance au centre du point singulier le plus voisin, et *Weierstrass*, par le prolongement analytique, indiquait, pour déterminer le domaine d'existence et calculer les valeurs de la fonction, un moyen, il est vrai, théorique. Ainsi se trouvaient posés deux problèmes principaux: *détermination des points singuliers, calcul de la fonction dans tout le domaine d'existence.*

Tandis que *Darboux* avait obtenu, à partir des points singuliers de la fonction, des renseignements sur l'allure asymptotique de ses coefficients de *Taylor*, M. *Hadamard* s'est attaché *à déterminer les singularités à partir de ces coefficients*. Dans un mémoire aujourd'hui classique et dans ses travaux ultérieurs, il a créé des méthodes d'exploration dont les principes, allant bien au-delà des applications qu'il en a faites, sont les bases de l'état actuel de la question: critères permettant de déceler les *pôles*, leurs parties infinies, même des points singuliers plus généraux, et par conséquent de *reconnaître les fonctions méromorphes*, *ordre* en un point du cercle de convergence, théorème sur la *multiplication* des *singularités*, influence des *lacunes* sur les points singuliers, notamment des séries non prolongeables *W*, voici quelques principes dont la fécondité a été confirmée par les nombreux successeurs de M. *Hadamard* (*Borel*, *Leau*, *Le Roy*, *Lindelöf*, *Faber*, *Fabry*, *Dienes*, *Hardy*, *Nörlund*, *Soula*, *Mandelbrojt* . . .).

L'étude des séries non prolongeables et des lacunes recevra un développement particulièrement élégant par les beaux travaux de MM. *Borel* et *Fabry*, et, tout récemment, MM. *Pólya* et *Ostrowski* lui apporteront des éléments nouveaux: rôle de la *densité des coefficients non nuls*, relation des *lacunes avec l'ultra-convergence* des sommes partielles.

Indépendamment des travaux précédents, guidé par ses recherches sur les séries trigonométriques, *Fatou* donne plusieurs théorèmes concernant *l'allure de la série sur le cercle de convergence* et il énonce un beau théorème, que *Hurwitz* et M. *Pólya* démontreront de deux façons différentes, sur le rôle des *signes* (c'est-à-dire des *arguments*) *des coefficients*, quels que soient les modules, dans les séries non prolongeables, tandis que, dans la voie ouverte par le théorème classique *d'Eisenstein*, les travaux de MM. *Borel* et *Pólya* d'une part, de *Fatou* d'autre part, devaient aboutir au beau théorème de M. *Carlson* sur les séries à coefficients entiers et rayon de convergence égal à un.

Quant à l'étude de la série de *Taylor* sur son cercle de convergence: convergence, divergence, allure au voisinage du cercle, théorème d'*Abel*, ses extensions et inversions, sommations diverses et propriétés différentielles de la somme, il faudrait un livre pour passer en revue les résultats acquis, dont beaucoup relèvent d'ailleurs du prolongement que nous allons maintenant examiner.

b) *Le prolongement analytique des séries de Taylor*

C'est, en effet, surtout dans le prolongement analytique que les progrès réalisés ont été importants. La question a tenu le premier plan des préoccupations de *Weierstrass:* son théorème sur la convergence dans un domaine, vers une fonction holomorphe, d'une série de fonctions holomorphes lorsqu'elle converge uniformément sur le contour (théorème corrélatif de l'intégrale de *Cauchy*), comme son « *Doppelreihensatz* » en témoignent suffisamment. Sa représentation de la dérivée logarithmique des fonctions entières conduisit *Mittag-Leffler* au beau théorème par lequel il donnait, pour toute fonction analytique uniforme dont les points singuliers forment un ensemble réductible, une expression, valable en tout point non singulier, où se trouvaient mis en évidence les points singuliers et la singularité de la fonction en ces points. Peu après, *Runge* représentait avec un large arbitraire une fonction uniforme quelconque par une *série de fractions rationnelles* absolument et uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine d'existence, et lorsque ce domaine est simplement connexe il donnait pour le même objet des *séries de polynomes* dont MM. *Painlevé*, *Hilbert*, ... ont démontré autrement l'existence. Dans sa thèse, M. *Painlevé* examinait le *prolongement l'un par l'autre de deux éléments* coïncidant non plus dans une aire commune, mais *sur une frontière linéaire commune*, ouvrant par là des questions d'unicité dont l'étude, poursuivie jusqu'à nos jours, sous des hypothèses de plus en plus larges, a été une des portes par où les fonctions de variable réelle et la théorie des ensembles sont entrées au cœur de la théorie des fonctions de variable complexe.

Mais un problème précis et délicat restait à résoudre dont on n'avait de solution que pour des séries très particulières comme la série hypergéométrique: *la série de Taylor d'une fonction $f(z)$ étant donnée, former à partir de ses coefficients une expression analytique représentant $f(z)$ dans un domaine plus vaste que le cercle de convergence (C), le plus vaste possible*. C'est de ce problème que M. *Borel*, par sa *théorie des séries sommables*, a donné la première solution générale, et ses travaux sur les séries divergentes marquent une date importante de l'histoire du prolongement analytique. Partant des sommations par moyennes linéaires de *Frobenius*, *Hölder*, *Cesaro*, et dégageant l'idée-mère, il définit la sommation exponentielle des séries numériques, il associe à toute série de *Taylor* à rayon de convergence fini $f(z) = \Sigma a_n z^n$, une fonction entière $F(z) = \Sigma \frac{a_n}{n!} z^n$ qui, prise pour noyau d'une intégrale convenable de *Laplace-Abel* $\int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da$, rend cette intégrale absolument et uniformément convergente à l'intérieur d'un domaine (B) (polygone si f a un nombre fini de points singuliers), *domaine de sommabilité exponentielle*, contenant (C), la valeur de l'intégrale étant $f(z)$ dans (C) et son prolongement analytique dans (B). Hors le cas où (C) est coupure W, (B) dépasse (C) en tous les points où f est holomorphe, et la génération de (B) à partir des points singuliers de f est aisée à concevoir. M. *Phragmen* montra ensuite que l'intégrale de M. *Borel* ne converge pas hors de (B).

En remplaçant la fonction exponentielle par d'autres fonctions sommatrices il a été possible d'étendre (B) et d'appliquer ces méthodes à l'étude des points singuliers situés sur la frontière de (B). Mais surtout, la solution de M. *Borel* a suscité de nouvelles recherches (*Lindelöf*, *Mittag-Leffler*, *Painlevé*, ...) qui ont abouti à de nouvelles solutions par des méthodes un peu différentes (représentation conforme, intégrales de *Laplace-Abel* généralisées où interviennent les fonctions $E_a(z)$, $E(z)$ de *Mittag-Leffler*) dans lesquelles l'intégrale de *Cauchy* joue toujours un rôle de premier ordre. Les solutions de *Mittag-Leffler* notamment, ont donné des séries de polynomes, qu'on peut former linéairement à l'aide des coefficients de *Taylor* de f et de constantes universelles, convergeant uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de « l'*étoile principale* », tandis que M. *Painlevé* donnait plus de souplesse à ces prolongements en donnant des développements valables dans des étoiles curvilignes variables qui permettent d'atteindre tout point régulier de la fonction.

Récemment *Porter* et *Jentzsch* ont donné des exemples de séries de *Taylor* dont certaines suites de sommes partielles convergent uniformément au-delà du cercle de convergence et M. *Ostrowski* a expliqué cette *ultraconvergence* par l'existence dans la série, après déduction éventuelle d'une série à rayon de convergence supérieur, d'une infinité de lacunes de largeur relative inférieurement bornée; il a montré qu'alors l'ultraconvergence a lieu uniformément dans tout domaine intérieur au domaine d'existence de la fonction uniforme limite $f(z)$, réalisant dans ce cas particulier, de la façon la plus simple, le problème du prolongement analytique.

6⁰ Le prolongement analytique

2⁰ Etude d'une fonction à partir de données relatives au voisinage d'un point singulier

Tandis qu'on cherchait à tirer de la série de *Taylor* et de son prolongement tous les renseignements qu'ils pouvaient donner, et de même que les géomètres prennent dans chaque problème les coordonnées les plus adéquates, les analystes poursuivirent l'étude de toutes les représentations analytiques dont l'expérience ou l'intuition révélaient l'utilité pratique et qu'une suspicion née du souci croissant de la rigueur avait empêché de progresser.

a) *Séries asymptotiques*

Cauchy, dans son travail sur la *série de Stirling*, avait eu déjà des soucis de ce genre; *Poincaré* par sa *théorie des séries asymptotiques* donne une base mathématique sérieuse à des considérations utiles qui jusque-là manquaient de rigueur et donne des règles pratiques d'utilisation de ces séries, en particulier pour l'intégration des équations différentielles; *Stieltjes* d'autre part, poursuivant une idée de *Laguerre*, étudie la liaison de ces séries avec les développements en fraction continue qui devaient, plus tard, ouvrir un champ si fécond de découvertes à l'activité des analystes. La théorie des séries asymptotiques divergentes, ou celle des séries de *Taylor* à *rayon de convergence nul* est en somme l'*étude d'une fonction uniforme au voisinage d'un point singulier A, dans un domaine dont la frontière passe par A, à l'aide de données sur la fonction au voisinage de A. Poincaré* eut surtout en vue l'application aux équations différentielles; M. *Borel* étudia le problème dans le cadre de la théorie des fonctions: *domaine de validité* (secteur de sommet A) d'une série asymptotique; *existence*, pour un développement asymptotique donné à priori, *d'une infinité de fonctions correspondantes*, au moins lorsque le domaine de validité est angulairement assez restreint, restriction que lèvera plus tard M. *Carleman*; relation de ce problème avec les *problèmes d'interpolation* de fonctions entières; *calcul d'une fonction distinguée* correspondant au développement asymptotique par la méthode de sommation des séries divergentes ... Après lui, le problème des conditions à imposer aux coefficients de la série et au domaine de validité pour que la fonction correspondante soit unique fera l'objet de travaux de plus en plus précis (*Watson, F.* et *R. Nevanlinna*) jusqu'à M. *Carleman* qui en a donné une solution complète et extrêmement originale dans le cas du domaine circulaire passant par A, solution que M. *Ostrowski* a ensuite étendue à des domaines très généraux.

b) *Fractions continues et intégrales de Stieltjes*

Dans une autre voie, *Stieltjes* approfondissant et développant un exemple de *Laguerre*, établissait une liaison extrêmement intéressante entre une série asymtotique divergente, une classe de fractions continues et un type nouveau d'intégrales auquel son nom est demeuré attaché. L'admirable mémoire de 1894—1895 qui expose ses résultats est aujourd'hui classique. Bien que la classe des séries asymptotiques auxquelles s'applique la sommation de *Stieltjes* soit particulière, par les connexions fécondes qu'il établit, par l'ingéniosité et la fécondité des concepts et des méthodes mis en œuvre (*intégrale de Stieltjes, noyaux de convergence des suites bornées de fonctions holomorphes, ...*) par les problèmes intéressants qu'il pose (problèmes des moments et recherches connexes), par les travaux qu'il a suscités depuis ceux de M. *Borel* jusqu'à ceux de M. *Carleman*, le mémoire de *Stieltjes*, qu'on trouve à la base des recherches modernes sur le problème des moments, les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, la convergence des suites de fonctions analytiques, a exercé sur le développement de la théorie des fonctions une influence capitale.

c) *Séries de Dirichlet*

Les recherches arithmétiques de *Dirichlet* l'avaient conduit au type de séries $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ auquel son nom a été attaché et dont l'intérêt a grandi avec les célèbres recherches de *Riemann* sur $\zeta(s)$. Depuis les travaux de MM. *Cahen* et *Hadamard* l'étude de ces séries, de leurs domaines de convergence simple, absolue, uniforme, du calcul de leurs coefficients, de l'allure de la somme au voisinage des droites de convergence et particulièrement de $z = \infty$, de la sommabilité, des singularités et du prolongement analytique de cette somme ..., a été poussée très loin sous l'influence de M. *Landau* par les travaux de nombreux géomètres. D'une part (*Bohr*, *M. Riesz*, *Hardy*, ...), on a cherché à leur *étendre les progrès réalisés dans le prolongement analytique des séries de Taylor*, d'autre part (*Bohr*, ...), on a cherché à *caractériser les fonctions admettant de tels développements en série*, enfin on a cherché (*Bohr*, *Hardy*) à utiliser les connaissances acquises pour étudier la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann*. Tandis que M. *Hardy* réussissait à prouver que $\zeta(s)$ *possède une infinité de zéros sur la droite* $R(s) = \frac{1}{2}$, mordant ainsi pour la première fois sur le théorème précis énoncé sans démonstration par *Riemann*, M. *Bohr*, outre ses multiples apports de détail aux questions précédentes, montrait la fécondité des considérations arithmétiques sur les λ_n, et, par sa belle *théorie des fonctions presque périodiques*, réussissait dans une certaine mesure à caractériser les fonctions développables en série de *Dirichlet*.

d) *Séries de facultés et d'interpolation*

Corrélativement, l'emploi des séries de facultés (ou de factorielles) et des *séries d'interpolation* (de *Stirling*, *Newton*, ...) s'est multiplié en Analyse après 1900 pour résoudre des problèmes posés par les équations différentielles, les équations linéaires aux différences finies. S'inspirant des résultats acquis sur les séries de *Taylor*, les séries asymptotiques, les séries de *Dirichlet*, MM. *Landau*, *Carlson* et surtout M. *Nörlund* ont développé l'étude moderne de leurs convergences, de leur sommabilité, de leur prolongement analytique, de leur allure au voisinage du point singulier $z = \infty$, de leur relation avec les séries asymptotiques et les fractions continues, ..., tandis que leur excellente *adaptation à l'étude des solutions des équations linéaires aux différences finies ou des équations différentielles linéaires au voisinage de leurs singularités*, résultait des travaux de MM. *Nörlund*, *Horn* et de leurs émules.

TROISIÈME PÉRIODE

Les environs de 1900 accusent une orientation nouvelle dans les méthodes et problèmes de la théorie des fonctions de variable complexe. Vers cette époque, la théorie des ensembles et des fonctions de variable réelle a acquis ses bases essentielles: les fonctions à variation bornée, l'intégrale de *Stieltjes*, la puissance des ensembles, leur classification et leur mesure, l'intégrale de *Lebesgue*. Parmi les artisans de cet épanouissement, *Jordan*, *Stieltjes*, M. *Borel*, ont quelquefois travaillé en vue des fonctions de variable complexe. A leur exemple, et profitant du rajeunissement des idées de *Riemann* par M. *Hilbert*, des études sur les fonctions orthogonales provoquées par la théorie des équations intégrales, les nouvelles générations d'analystes travailleront en unissant les variables réelles aux variables complexes; tandis que les anciennes méthodes se développeront par les apports nouveaux, de plus en plus s'affirmera un principe que l'on peut énoncer ainsi: *aux frontières du domaine d'existence W, l'allure de la fonction relève surtout de la théorie des fonctions de variable réelle, les possibilités nouvelles révélées par les progrès de celle-ci se réalisant presque toutes aux frontières dans les problèmes « naturels » sur les fonctions analytiques qu'on pourrait croire les plus simples*, et ainsi se réalisera une fusion chaque jour plus intime des points de vue réel et complexe dans la théorie des fonctions.

Dans sa thèse de 1894, M. *Borel* tente les premiers essais d'extension du prolongement analytique: avec ses séries de fractions simples, et utilisant sa méthode d'exclusion, il fournit les premiers exemples d'expressions dont les valeurs,dans des régions de convergence séparées au point de vue *W*, sont pourtant liées entre elles. Dans son mémoire des Acta sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles, il précisera ses idées: par les séries de polynomes (*M*), la somme d'une série de fractions simples peut, sous des hypothèses convenables, se prolonger d'une région d'holomorphie dans une région à pôles denses où la somme n'existe pas au point de vue de *Weierstrass*. En 1912 enfin, il donnera les principes d'une théorie générale des fonctions *quasi-analytiques de variable complexe*, de leurs domaines d'existence *C*, de leur représentation analytique par les développements *M*.

Le mémoire de *Stieltjes* (1894—1895), tant par la représentation analytique en intégrales de *Stieltjes* des fonctions bornées (ou s'y ramenant), que par le théorème sur la convergence uniforme des séries de fonctions holomorphes bornées dans un domaine sous l'hypothèse d'un noyau de convergence intérieur à ce domaine, marque lui aussi des progrès et une orientation qui, en connexion avec les travaux d'*Arzela* et de M. *Hilbert* favoriseront les études sur des familles intéressantes de fonctions analytiques (en particulier les fonctions bornées) sur leur représentation et leurs propriétés géométriques et sur leur convergence.

Dans son beau mémoire de 1901, à la faveur des progrès réalisés par *Arzela* dans l'étude des suites de fonctions et de leur répartition en suites convergentes, M. *Hilbert* reprend le raisonnement de *Riemann* et, le mettant sur des bases rigoureuses, donne une nouvelle solution du problème de *Dirichlet* pour les fonctions harmoniques. Son analyse consacrera l'introduction de la méthode des variations pour démontrer rigoureusement l'existence des solutions d'un grand nombre de problèmes non locaux de la théorie des fonctions et aussi pour les calculer.

L'introduction des idées de M. *Lebesgue* dans les représentations de fonctions analytiques où intervient l'intégrale, l'étude connexe des séries de *Fourier*, et, en général, des séries de fonctions orthogonales suscitée par la théorie des équations intégrales, complètent l'influence des trois mémoires précédents sur l'évolution de la théorie des fonctions. Dans sa thèse de 1906 sur les séries trigonométriques et les séries de *Taylor*, *Fatou* obtient des résultats, comme son célèbre théorème sur l'existence des valeurs limites radiales des fonctions bornées dans un cercle, dont les conséquences ne se comptent plus et qui feront de plus en plus apparaître l'importance des ensembles de mesure nulle que par ailleurs M. *Borel* classait et dont il relevait l'importance fondamentale pour les domaines C.

Les éléments nouveaux incorporés dans l'objet et la technique de la théorie des fonctions s'y diffusent rapidement, produisent des rejets féconds donnant à la théorie l'aspect de ces figuiers des banyans, forêts aux mille colonnes.

1° Développements sur les fonctions entières ou holomorphes dans un cercle, sur la convergence des suites et le prolongement analytique

Dans la théorie des fonctions entières, de nombreux géomètres précisent et complètent les principes donnés par MM. *Hadamard* et *Borel*. *Boutroux* perfectionne la méthode d'exclusion, M. *Wiman* donne à celle du plus grand terme une précision et une extension aux fonctions holomorphes dans un cercle qui, outre des résultats très originaux provoqueront en particulier les travaux de MM. *Pólya* et *Valiron*. Concurremment avec eux MM. *Lindelöf*, *Blumenthal*, *Denjoy*, *Maillet*, *Littlewood*, ...étudient les fonctions d'ordre entier, d'ordre infini, d'ordre nul, précisant les relations entre la croissance et la densité des zéros. Par l'*extension du principe du maximum du module* qu'il donnera avec M. *Phragmen*, M. *Lindelöf* amorce avec ses élèves l'étude de la fonction entière au voisinage de l'infini lorsque la frontière du domaine passe par l'infini.

A un autre point de vue, dans la voie ouverte par la démonstration élémentaire de M. *Borel*, M. *Landau*, M. *Schottky* donnent d'importantes propositions aujourd'hui classiques concernant les fonctions holomorphes dans un cercle et y admettant *deux valeurs exceptionnelles*, tandis que M. *Caratheodory* relève le rôle essentiel de la fonction modulaire et du lemme de *Schwarz* dans les *inégalités précises* sur le rayon du cercle d'holomorphie ou, sur le maximum du module qui traduisent analytiquement ces propositions. Sous des conditions initiales très larges, ces inégalités font rentrer les fonctions à valeurs exceptionnelles dans le cadre, considéré par *Stieltjes*, des fonctions à module borné. Reliant ces nouveaux théorèmes aux travaux de *M. Osgood*, d'*Arzela*, de *Vitali*, de M. *Montel* et de leurs émules, sur les fonctions bornées, MM. *Caratheodory* et *Landau* obtiennent un critère de convergence pour les *familles à valeurs exceptionnelles* et M. *Montel*, pour marquer la solidarité remarquable créée entre les fonctions d'une même famille par une limite supérieure du module (*Stieltjes*), par l'égale continuité (*Arzela*) par deux valeurs exceptionnelles (*Caratheodory*, *Landau*) propose de les appeler *familles normales* et poursuit l'étude des cas où cette solidarité existe. De nouveaux critères venus d'ailleurs s'ajouteront aux anciens, en particulier celui de l'*univalence* (*Kœbe*), tandis que l'étude, sur la sphère de *Riemann*, par M. *Ostrowski*, de l'*oscillation sphérique* des fonctions méromorphes d'une famille, poursuivie par M. *Caratheodory* à l'aide du concept de *convergence continue* de *Hahn* donnera pour caractériser ces familles, un critère nécessaire et suffisant d'une élégance achevée. Avec plus de précision encore, M. *Ostrowski*, s'appuyant sur le *lemme des deux constantes* par lequel, avec M. *Nevanlinna*, il généralise le *théorême des trois cercles de M. Hadamard*, mesure et compare la convergence d'une suite de fonctions dans les diverses parties du domaine de convergence uniforme et, parmi les corollaires de son étude, obtient ses belles propositions sur l'ultra-convergence des séries de *Taylor*. Les critères de convergence antérieurs s'affineront encore de M. *Blaschke* à MM. *Khintchine* et *Ostrowski*, lorsque seront introduits dans les hypothèses soit des *noyaux de convergence à la Vitali*, mais à *point limite frontière*, soit des *noyaux de convergence entièrement frontières* mais intéressant les limites presque partout sur le cercle frontière (*Fatou*) des fonctions de la famille supposées bornées.

Avec le *théorème de Fatou* les questions soulevées par la thèse de M. *Painlevé* recevront de *Fatou* lui-même, de MM. *Riesz*, *Priwaloff*, *Lusin*, ..., sous des hypothèses de plus en plus larges, des solutions de plus en plus précises, qui nous renseignent sur la mesure des ensembles où une fonction analytique s'annule à la frontière du domaine d'existence. Employé pour les passages à la limite dans les moyennes circulaires d'ordre positif des modules des fonctions holomorphes, dont l'introduction systématique par M. *G. H. Hardy*, développée par MM. *Littlewood* et *F. Riesz*, permet non seulement d'obtenir comme je l'ai montré, des propositions parallèles aux propositions classiques où intervient le maximum du module, mais encore d'explorer plus finement les propriétés des familles de fonctions et de les représenter analytiquement, le *théorème de Fatou* permettra d'une part, d'affiner les critères envisagés plus haut, d'autre part de développer cette théorie des *fonctions subharmoniques* dont M. *F. Riesz* a marqué en de beau mémoires toute l'importance en Analyse et spécialement dans la théorie du potentiel.

Avec l'étude approfondie par MM. *Faber*, *Fejer*, *Müntz*, *Sasz*, *Carleman*, ... des développements en séries de polynômes ou des approximations par des sommes de monômes d'ordres convenables, avec l'étude de ces polynômes de meilleure approximation dont on doit l'introduction à *Tchebychef*, et l'étude développée à MM. *S. Bernstein*, *Tonelli*, *Faber*, *Jackson*, de *La Vallée-Poussin*, ..., en particulier des relations entre l'ordre asymptotique de l'approximation et les singularités de la fonction à approcher, nous aurons signalé enfin quelques progrès récents de la représentation des fonctions dans l'ordre du prolongement analytique.

2° Rôle des variations et des suites orthogonales

M. *Hilbert* a déterminé, par son mémoire de 1901, un retour fécond aux idées de *Riemann* caractérisé par un large recours à la *méthode des variations* et aux *définitions par une propriété d'extremum.*

Lui-même ou ses élèves MM. *Courant*, *Kœbe*... ont obtenu ainsi des solutions élégantes pour la représentation conforme des aires ou des surfaces de *Riemann* de connexion quelconque et pour les problèmes d'existence qui se posent dans l'uniformisation des fonctions algébriques ou analytiques. En minimant, avec des données initiales très simples, non plus des intégrales mais des quantités comme le maximum du module dans un domaine, ou en opérant corrélativement, MM. *Fejer*, *F. Riesz*, *Caratheodory*, *Rado*, ... ont démontré avec une simplicité « maximum » l'existence de la fonction de *Riemann* représentant le domaine sur un cercle. On s'est attaché aussi aux familles de fonctions simples dépendant d'un indice (polynômes des divers degrés, ...) et dont chacune jouit de la propriété d'extremum caractérisant une fonction à déterminer. M. *Bieberbach* a ainsi donné pour la fonction de *Riemann* une série de polynômes minimant l'intégrale de *Riemann*, tandis que j'employais à cet objet des polynômes ou des fractions rationnelles minimant le maximum du module ou d'autres intégrales, et, dans des cas très généraux, par une méthode dualistique de celle de *Ritz*, je ramenais le *problème de Dirichlet* au *problème de meilleure approximation sur la frontière* en mesurant l'approximation soit comme *Tchebychef* soit à l'aide d'intégrales convenables.

L'emploi très élégant des variations dans les travaux de M. *Carleman* sur les séries asymptotiques ou le calcul des fonctions quasi-analytiques procèdent aussi de l'influence de M. *Hilbert*.

Dans un ordre d'idées voisin, les études sur les équations intégrales, sur les suites de fonctions orthogonales, de MM. *Hilbert, Schmidt* ... ont provoqué l'apparition de suites de polynômes définis dans un domaine par leurs propriétés d'orthogonalité sur la frontière ou dans le domaine, à l'aide desquels MM. *Szegö* et *Carleman*, par exemple ont pu représenter toute fonction analytique dans le domaine, ces polynômes s'exprimant asymptotiquement par la fonction de *Riemann* du domaine lorsque leur degré devient infini.

3⁰ Retour à l'esprit „Funktionentheoretisch" de Weierstrass

Les perfectionnements de la technique que nous venons de noter dans les 1⁰ et 2⁰, l'étude approfondie, nécessaire au problème général de l'uniformisation, de la *topologie des surfaces de Riemann générales*, que nous devons à *Poincaré*, à MM. *Weyl*, *Kœbe* et leurs successeurs, ont ramené un souci d'ordre esthétique et philosophique procédant de *Weierstrass*, et excluant des problèmes sur la détermination des fonctions analytiques tous les éléments autres que des fonctions analytiques. Ce souci nous a valu les beaux mémoires de MM. *Caratheodory* et *Lindelöf* sur la représentation conforme, une reprise par M. *Kœbe* dans cet esprit, de tous ses travaux sur la représentation des aires de connexion quelconque, sur l'uniformisation, et des travaux ultérieurs de M. *Bieberbach*. La technique et la topologie en ont bénéficié elles-mêmes: introduction de suites de fonctions algébriques d'approximation, utilisation meilleure du lemme de *Schwarz* et des lemmes analogues, introduction des suites de surfaces de *Riemann* et de leurs *noyaux* ..., tandis qu'ailleurs la thèse de M. *Painlevé* suscitait d'excellents outils comme le lemme de M. *Carleman*, auquel je crois avoir donné récemment l'extension qu'il mérite.

4⁰ La géométrie des fonctions analytiques

Le même souci d'ordre esthétique a, sous l'influence de *Klein*, *Study* et de M. *Caratheodory*, favorisé, il me semble, les études géométriques sur les fonctions analytiques.

M. *Caratheodory* d'une part, par ses études sur les coefficients de *Taylor* des fonctions à partie réelle positive ou bornée dans le cercle unité, poursuivies par MM. *Herglotz*, *Ostrowski* (intégrale de *Stieltjes*) et, pour les fonctions à module borné, par MM. *I. Schur*, *R. Nevanlinna*, *Denjoy*, ..., a développé un élégant chapitre de *géométrie des fonctions bornées* où la convexité de *Minkowski* joue un rôle fondamental et dont le lemme de *Schwarz* faisait soupçonner l'existence.

D'autre part, pour étudier la convergence singulière des itérées d'une fraction rationnelle, j'établis en 1917 une extension du lemme de *Schwarz* aux cercles tangents au cercle fondamental, dont le succès a dépassé toutes mes espérances, MM. *R. Nevanlinna*, *Wolff*, *Caratheodory* notamment l'ayant déjà développée et appliquée au problème des moments, à l'existence des dérivées limites, à la représentation conforme ...

En second lieu, les études de M. *Kœbe* sur la mesure des *ensembles frontières* de domaines où existent les fonctions automorphes uniformisantes, nous ont valu le beau « *Verzerrungssatz* » inaugurant la *géométrie des fonctions univalentes* dans un cercle, que M. *Bieberbach* a complété par un heureux « *Drehungssatz* », tandis que son « *Flächensatz* » fournissait pour leurs coefficients de *Taylor* des inégalités dont la précision s'affirme vers une limite exacte qu'il a conjecturée et que M. *Dieudonné* a établi dans le cas réel.

M. *Caratheodory*, en étudiant, dans le cas le plus général, la correspondance entre points frontières dans la représentation conforme sur un cercle des aires planes, inaugurait un autre chapitre de cette géométrie où la topologie et l'analyse se mêlent de la façon la plus heureuse et la plus féconde, tandis que les déformations intérieures ou frontières créées par cette correspondance sous des hypothèses frontières de plus en plus restrictives (courbes de *Jordan* pourvues ou non de tangentes, convexes, à courbure bornée, etc. ...) ont suscité les nombreux travaux de MM. *Study*, *Lindelöf* et des élèves de M. *Caratheodory*.

Mentionnant enfin le *diamètre transfini des aires* dont l'introduction par M. *Fekete* et l'utilisation en représentation conforme par MM. *Pólya*, *Szegö*, ... ont donné lieu à de belles propositions, nous aurons donné un aperçu de cette *géométrie des fonction analytiques* qui se traduit souvent par la recherche de *limites exactes* assignées aux familles de fonctions douées d'une propriété caractéristique

5° Equations fonctionnelles. Itération des substitutions. Points et courbes J. Nouvelles recherches sur les fonctions entières et méromorphes

L'enrichissement de la technique des fonctions analytiques dont nous avons suivi les progrès dans les paragraphes précédents a commencé dans les quinze premières années de ce siècle. Il s'est poursuivi le plus souvent par la nécessité de créer les méthodes les mieux adaptées à l'étude de questions intéressantes rendues plus abordables, et au cours de cette étude se sont révélées des circonstances nouvelles qui ont enrichi l'objet de la théorie des fonctions.

Tandis que les solutions des équations aux différences finies, linéaires ou non, leurs développements, leurs singularités, leurs domaines *W*, avaient fait l'objet de travaux étendus, notamment de M. *Nörlund*, les solutions des équations fonctionnelles dont la substitution fondamentale n'est pas linéaire, n'avaient avant 1917 fait l'objet que d'études locales ou très particulières, dont l'intérêt, pour celles de

Kœnigs et de *Fatou* notamment, faisait souhaiter une étude dans tout le domaine d'existence. Lorsque la substitution fondamentale est rationnelle, les recherches que *Fatou* et moi-même, indépendamment l'un de l'autre, avons poursuivi tant sur l'itération de la substitution, la délimitation des domaines de convergence, leur structure, leur connexion, les singularités de leurs frontières, ... que sur les solutions des équations fonctionnelles correspondantes les plus simples (*Schrœder, Poincaré, Abel, Picard*, équation de permutabilité ou semi-permutabilité, ...) ont abouti d'abord à la vérification du principe que nous énoncions au début de cette troisième partie sur la pénétration, par les frontières, des singularités de la théorie des ensembles et des fonctions de variable réelle jusqu'au cœur des problèmes « *naturels* » les plus simples concernant les fonctions analytiques (ici, frontières sans tangentes, à points doubles partout denses, domaines à connexion infinie, à frontières ponctuelles ou linéaires, ...). D'un autre côté, et sans parler de la mise au point et du perfectionnement de la technique acquise qu'elles ont nécessité et dont nous avons antérieurement cité des exemples, elles ont imprimé une nouvelle direction aux études sur les familles de fonctions et sur les fonctions entières et méromorphes. C'est, en effet, en étendant aux familles de fonctions méromorphes la propriété caractéristique des points singuliers de l'itération que j'ai découvert ces ensembles de « *points singuliers des familles de fonctions* » (*points J*) auxquels les géomètres, (*Ostrowski, Valiron* ...) qui en ont poursuivi l'étude ont donné mon nom et dont l'application aux fonctions entières ou méromorphes (points, droites, courbes *J*) dans mes recherches sur les théorèmes de M. *Picard* a suscité ensuite des travaux pleins d'intérêt de MM. *Ostrowski, Milloux* (cercles de remplissage), *Pólya, Valiron*, ..., en relation avec l'ordre de la fonction, les lacunes de sa série de *Taylor* ..., en dernier lieu de M. *W. Bernstein* en relation avec le polygone de sommabilité de M. *Borel*.

Tandis que des résultats généraux sur les *arguments* des racines des équations $f(z) = Z$ étaient obtenus dans cette voie, les analystes poursuivaient autrement l'étude des $f(z)$ entières ou méromorphes par des méthodes de plus en plus précises, concurremment avec l'étude rigoureuse des *singularités de la fonction inverse* $z = \varphi(Z)$ [*valeurs asymptotiques de* $f(z)$] (*Iversen, Gross*, ...).

En 1920, par une analyse perspicace des moyennes de *Poisson-Jensen*, appliquées aux logarithmes des modules des fonctions entières, dont M. *R. Nevanlinna* allait tirer une méthode générale très fine et très précise d'étude des fonctions méromorphes, M. *Carleman* obtenait sur les fonctions entières d'ordre fini ϱ, un théorème *limitant le nombre de leurs valeurs asymptotiques en fonction de l'ordre*; sa méthode remarquablement précisée et perfectionnée par M. *Ahlfors*, devait fournir la limite exacte 2ϱ dont M. *Denjoy* avait conjecturé l'existence. Puis, par les beaux et pénétrants travaux de M. *R. Nevanlinna* que suivirent MM. *Valiron, Bloch, H. Cartan, Ahlfors*, ..., la théorie des fonctions méromorphes dans tout le plan ou dans un cercle recevait des contributions substantielles tandis que MM. *Pólya* et *Nevanlinna* soulevaient d'originales questions d'unicité intéressant ces fonctions.

Il reste dans les équations fonctionnelles, dans l'itération, dans la théorie des fonctions méromorphes bien des questions à résoudre qui méritent l'effort des jeunes analystes: M. *Valiron*, dans sa conférence, vous en indiquera quelques-unes.

6⁰ Le rôle des surfaces de Riemann générales

L'uniformisation des fonctions multiformes, après que *Poincaré* en eut démontré la possibilité, s'est décomposée en deux problèmes distincts: un problème de topologie sur les surfaces de *Riemann* générales et leurs diverses surfaces de recouvrement, un problème consécutif de représentation conforme, qui ont tous les deux provoqué de nombreux travaux.

Le premier de ces problèmes nous a familiarisés avec les surfaces de *Riemann* générales et celles du type parabolique ou hyperbolique admettant des groupes de superposition. L'étude des fonctions inverses des fonctions méromorphes tendait au même but pour les surfaces simplement connexes du type parabolique. Avec M. *Caratheodory* s'introduisaient les familles de surfaces de *Riemann* et leurs noyaux. A la faveur de ces progrès de la technique des surfaces de *Riemann* que j'avais éprouvés dans mes recherches sur les équations fonctionnelles, considérant qu'une fonction $Z = f(z)$ réalise une représentation conforme biunivoque d'une surface de *Riemann* d [domaine d'existence et d'uniformité de $f(z)$] sur la surface D que décrit Z lorsque z décrit d [domaine d'existence et d'uniformité de la fonction inverse $z = \varphi(Z)$], j'ai, dès 1922, et pour tous les problèmes où une donnée analytique ou géométrique, ou bien une propriété fonctionnelle, permet d'établir à priori les domaines d et D ou l'un d'eux, proposé d'en déduire, par le théorème fondamental sur la représentation conforme, à la fois la solution f, son inverse φ, et les domaines d'existence de f et φ. J'ai effectivement montré, pour de nombreuses équations fonctionnelles, où d et D admettent des groupes de transformations rationnelles, la puissance de cette méthode qui permet la détermination et l'étude simultanée de f et φ, dans d, D et aux frontières, par utilisation des résultats connus sur la correspondance des frontières de d et D. Lorsque f est uniforme il convient quelquefois de déterminer et d'étudier d'abord D, comme je l'ai fait encore tout récemment pour la représentation conforme des aires multiplement connexes sur des aires du type *de La Vallée Poussin*.

D'un autre point de vue qu'on peut rattacher aux recherches synthétiques de M. *Lindelöf*, à partir de son principe fondamental analogue au lemme de *Schwarz* transposé aux surfaces de *Riemann*, la connaissance de propriétés géométriques ou de limitations ou de propriétés d'extremum données à priori sur D permet de conclure à des théorèmes d'existence ou des inégalités précises et variées pour f, ou pour une classe de fonctions, dans des domaines variés à l'intérieur de d. Ce point de vue, sur lequel j'ai insisté à la suite des travaux de M. *Littlewood* sur les fonctions *subordonnées* me paraît lui aussi devoir être fécond.

L'utilisation de plus en plus grande des surfaces de *Riemann* à ces divers points de vue comme méthode de découverte ou d'unification, s'est affirmée, comme je l'avais espéré, dans les travaux ultérieurs de M. *Bloch* et de ses continuateurs d'une part, de MM. *Speiser*, *Nevanlinna*, *Ahlfors*, ... de l'autre, dont l'effort, sous l'influence du *théorème de M. Picard*, s'est appliqué à la recherche de critères topologiques ou autres différenciant les surfaces hyperboliques et paraboliques. Sur ce chapitre je ne saurais mieux faire que de vous renvoyer à la conférence de M. *Nevanlinna*. Mais je pense qu'il conviendra aussi d'étudier les familles de surfaces de *Riemann* comme les familles de fonctions. Je vois dans l'étude approfondie de classes de plus en plus nombreuses de surfaces de *Riemann* douées de propriétés géométriques intéressantes une source de progrès futurs pour la théorie des fonctions.

7° Les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

La théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, longtemps délaissée par les analystes, a connu dans ces dix dernières années une reprise de faveur couronnée de succès dont les conférences de MM. *Caratheodory* et *Severi* vous sont ici même un témoignage.

Après sa représentation (simplifiée par *Cousin*) des fonctions méromorphes par un quotient de fonctions entières, *Poincaré* attaquait en 1907 un deuxième problème général, celui de la *représentation analytique biunivoque l'un sur l'autre de deux domaines bornés à quatre dimensions* et montrait que le problème est *généralement impossible*, même pour des domaines simplement connexes.

Après l'étude de la *convergence des séries doubles de puissances* et des diverses manières de les ordonner (*Phragmen*, *Pringsheim*, *Fabry*, *Faber*, *Hartogs*), le prolongement analytique et l'étude des *singularités essentielles ou non*, ont été abordés par M. *Hartogs* dans de remarquables recherches que *E. E. Levi* a poursuivies par la recherche des *singularités essentielles*. Il en ressort que ces singularités, jamais isolées, possèdent au voisinage de chacun de leurs points des *propriétés métriques caractéristiques* (*pseudo-convexité*) définies généralement par des *inégalités différentielles précises* fournies pour deux dimensions par M. *Hartogs* et pour trois par *E. E. Levi*.

Après mes études sur les « points J » des familles de fonctions d'une variable, j'ai conjecturé que les *« points J » des familles de fonctions de plusieurs variables*, points singuliers pour l'*ensemble des fonctions de ces familles*, devaient avoir les mêmes propriétés que les points singuliers d'une fonction de plusieurs variables. Après une brève théorie de la normalité des familles, j'ai démontré que tous les théorèmes de M. *Hartogs* et de *E. E. Levi* étaient vrais pour les points J de familles de fonctions, expliquaient les propriétés antérieurement reconnues aux rayons de convergence associés des séries de puissances, et j'ai soulevé un problème général, que MM. *H. Cartan* et *P. Thullen* viennent de résoudre affirmativement, sur l'identité des frontières fermées d'holomorphie ou de méromorphie d'une fonction et des frontières fermées de convergence ou de normalité (ensemble frontière de points J) d'une famille de fonctions.

D'autre part, après de nombreux travaux locaux, le problème de la correspondance biunivoque analytique de deux domaines et des transformations automorphes d'un domaine, attaqué par MM. *Reinhardt*, *Behnke*, par M. *Caratheodory* qui attachait une métrique à chaque domaine borné de l'espace par l'intermédiaire des familles holomorphes bornées dans ce domaine, par MM. *H. Cartan*, *P. Thullen*, *Bergmann*, . . . , a marqué dans ces dernières années de considérables progrès, pour l'exposé desquels je vous renvoie à la conférence de M. *Caratheodory*.

Il semble enfin que sa connaissance du monde algébrique et l'étude du problème de *Dirichlet* à quatre dimensions aient décidé M. *Severi* à vouer aux problèmes soulevés par les fonctions générales de deux ou plusieurs variables, l'activité qu'il a antérieurement vouée avec tant de succès aux fonctions algébriques de deux variables. Il vous en parlera lui-même dans sa conférence.

Les fonctions analytiques de plusieurs variables offrent les meilleures perspectives aux recherches des analystes et il faut souhaiter qu'ils s'y consacrent nombreux et actifs.

8⁰ Les fonctions quasi-analytiques d'une variable

M. *Borel*, par les pénétrantes recherches qui remontent à sa thèse, avait en 1912 complètement différencié les concepts de fonction monogène et de fonction analytique, défini les domaines d'existence C, donné des exemples de séries de fractions simples représentant des fonctions *quasi-analytiques* et indiqué dans des cas très généraux la possibilité de leur calcul par séries de polynômes du type *Mittag-Leffler*. Une telle fonction non prolongeable W, parfaitement déterminée par sa valeur et les valeurs de toutes ses dérivées en un point A du domaine C, admet un « *prolongement B* », unique dans tout C, à partir de A.

D'autre part, l'étude des équations aux dérivées partielles a conduit M. *Holmgren* et M. *Hadamard* à des classes de fonctions de variable réelle $f(x)$, indéfiniment dérivables sur un segment dans lequel $[f^{(\gamma)}(x)] < k^\gamma A_\gamma$, ($k$ indépendant de γ, $A_\gamma = \underline{|2\gamma}$ ou $A_\gamma = \underline{|[1+\varepsilon]\gamma}$), pour lesquelles le prolongement est possible d'une infinité de manières. Comment dès lors, *caractériser les A_γ des classes réelles quasi-*

analytiques, c'est-à-dire à prolongement unique? Partant d'une condition suffisante donnée par M. *Denjoy* et précisée par M. *Borel*, M. *Carleman*, dans un petit livre résumant ses recherches de 1922–1923, où la profondeur des idées s'allie à une élégance parfaite des méthodes, a non seulement résolu la question en fournissant *plusieurs formes de conditions nécessaires et suffisantes* et en donnant des *méthodes de calcul effectif*, mais il l'a encore rapprochée de questions anciennes, comme l'unicité des fonctions ayant un développement asymptotique donné, le problème des moments de *Stieltjes*, la transformation des séries asymptotiques divergentes en fractions continues de *Stieltjes* convergentes, qui en ont reçu des solutions et un nouvel essor.

Vers la même époque, MM. *de La Vallée-Poussin* et *S. Bernstein*, plus tard M. *Ostrowski*, apportaient aux mêmes questions d'intéressantes contributions par d'autres moyens (séries de *Fourier*, meilleure approximation, ...). Par tous ces travaux se trouvait établie et caractérisée *entre les fonctions analytiques et les fonctions quelconques d'une variable réelle l'existence d'un champ étroit de fonctions quasi-analytiques.*

Les résultats de M. *Carleman* m'ont suggéré en 1925 de reprendre le point de vue complexe de M. *Borel* (condensation des singularités), en recherchant les classes assez générales et «*naturelles*» de fonctions quasi-analytiques d'une *variable complexe* qu'on pourrait obtenir par l'*application d'un algorithme régulier*. Les « points J » de la suite des itérées R_n d'une fraction rationnelle condensant les pôles de ces R_n, les séries $\Sigma\, a_n\, R_n$ formées avec les R_n comme la série de *Taylor* associée $\Sigma\, a_n z^n$ avec les puissances de z, outre des fonctions à propriétés Weierstrassiennes remarquables, m'ont fourni, *correspondant* (avec mêmes a_n) *à des classes de fonctions entières d'ordre nul définies simplement par leur croissance, des fonctions quasi-analytiques de toutes les classes, douées de propriétés fonctionnelles remarquables* (des équations linéaires analytiques aux différences finies peuvent admettre, par exemple, des solutions quasi-analytiques, nulle part analytiques, ou pouvant se prolonger B à travers des coupures W).

Ces recherches sur les fonctions quasi-analytiques me paraissent dignes d'être poursuivies. L'intégration des fonctions quasi-analytiques de variable complexe et la théorie des équations fonctionnelles ou différentielles à solutions quasi-analytiques me paraissent notamment receler des phénomènes nouveaux que j'ai signalés dans une note des Comptes-Rendus et qui diffèrent radicalement de la multiformité classique des fonctions analytiques. Il paraît aussi intéressant de rechercher d'autres exemples naturels de prolongement B à travers des lignes ou des aires singulières W.

CONCLUSION

Au long de ces pages nous avons vu la théorie des fonctions s'élever graduellement du local au général par les fonctions rationnelles, les fonctions algébriques et les transcendantes connexes, les fonctions entières ou méromorphes, jusqu'aux fonctions générales définies par des représentations analytiques (séries, intégrales, produits) à puissance croissante. Nous avons vu les analystes élargir constamment les domaines de validité de ces représentations analytiques et rechercher pour elles les domaines maxima. Nous avons vu le concept même de fonction de variable complexe se préciser et la *fonction monogène de Cauchy* fournir la *fonction analytique de Weierstrass* et la fonction *quasi-analytique de M. Borel.* Les classes étudiées sont devenues de plus en plus générales: fonctions satisfaisant à des équations algébriques, à des équations différentielles algébriques, à des équations fonctionnelles, classes de fonctions soumises à des conditions analytiques de plus en plus larges, ou à des conditions géométriques ou à des conditions d'extremum, fonctions bornées, fonctions à valeurs exceptionnelles, fonctions univalentes. L'étude des classes de fonctions est devenue de plus en plus fine et minutieuse, manifestant par endroits une précission et une élégance qui font songer à l'esthétique de la géométrie d'Euclide.

Nous avons noté les apports féconds aux questions posées, aux méthodes, aux principes, des branches connexes de la Science Mathématique; nous avons vu la théorie des fonctions de variable complexe s'enrichir en s'assimilant plus intimement des concepts et des méthodes de la Topologie, du calcul des variations, de la théorie des fonctions de variable réelle. Nous avons vu aussi, comme conséquence de ces apports et des progrès réalisés sur la représentation conforme et la topologie des surfaces de *Riemann*, s'introduire des méthodes nouvelles de *définition et d'exploration en bloc* pour des fonctions ou des classes de fonctions d'une variable, et s'inaugurer des recherches analogues pour plusieurs variables. *La théorie moderne résulte de la fusion intime de tous ces éléments.*

Loin qu'elle ait été seulement assimilatrice, la théorie des fonctions a été souvent l'instigatrice des progrès réalisés par ces sciences connexes. Il serait facile d'en donner bien des exemples différents de ceux rencontrés dans cette conférence. Nous n'insisterons pas sur les progrès que la théorie des fonctions a suscités en Arithmétique, dans la théorie des classes de formes, des nombres premiers ..., dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, et, par ses élégantes représentations paramétriques inaugurées par *Riemann*, dans la géométrie non euclidienne, les surfaces à courbure constante, les surfaces minima, le problème de *Plateau.*

Cette revue rapide nous amène à la conclusion suivante exprimée maintes fois par

Poincaré et M. *Picard* dans leurs écrits philosophiques, et en ces termes par M. *Hilbert* au Congrès de Paris.

« Les problèmes précédents, disait-il, nous montrent la variété croissante de la Science mathématique. N'est-il donc pas à redouter qu'elle se scinde en plusieurs branches n'ayant plus guère de rapports entre elles? Je ne le crois pas et je ne le souhaite pas; la Science mathématique est un tout indivisible, un organisme dont le développement est subordonné à la cohésion de ses parties. Nous voyons du reste qu'en se développant, très loin de perdre son caractère de science organisée, elle le manifeste de jour en jour plus clairement. De plus, chaque progrès réel va de pair avec la découverte de moyens plus pénétrants et de méthodes plus simples, dont l'acquisition et l'adaptation permettent à chaque géomètre un accès plus facile aux diverses branches des mathématiques. »

Réduite à ses seules préoccupations, à des problèmes, à des méthodes purement « *funktionentheoretisch* » la théorie des fonctions se subdiviserait indéfiniment sans progrès réel, produisant des rameaux sans force, une floraison sans durée et sans fruits.

Par un contact intime avec les autres branches de l'Analyse: fonctions de variable réelle, équations différentielles et aux dérivées partielles, calcul des variations, elle progressera,

« *et les fruits passeront la promesse des fleurs* ».

Paris, le 23 Août 1932.

Die Probleme der modernen Galoisschen Theorie

Von N. Tschebotaröw, Kasan

Sehr geehrte Anwesende! In diesem Jahre ist ein Jahrhundert seit dem Tode von Évariste Galois verflossen. Darum erlaube ich mir, die ehrenvolle Einladung des hiesigen Organisationskomitees zu benutzen, um den heutigen Stand und die Perspektiven der wichtigsten Schöpfung von Galois darzulegen, die unter dem Namen „Galoissche Theorie" bekannt ist. Es liegt ausser dem Rahmen meines Vortrages, die Bedeutung seiner Ideen für die verschiedenen Gebiete der mathematischen Wissenschaft auseinanderzusetzen. Ich erlaube mir nur, hervorzuheben, dass die durch die Galoissche Theorie beeinflusste Umordnung von Interessen, das Entstehen neuer mathematischer Gebiete, wie der „Riemannschen Flächen", der „automorphen Funktionen", der „kontinuierlichen Transformationsgruppen", als ein prächtiges Beispiel dafür dienen kann, dass Algebra als Wiege wichtigster mathematischer Methoden erscheint, die später eine leitende Rolle in der ganzen Mathematik zu spielen beginnen.

Der neue Aufschwung der Rolle, welche die Gruppentheorie in der ganzen Mathematik spielt, bewirkt eine fundamentale Umgestaltung der gruppentheoretischen Grundlagen. Das Muster, nach welchem die Gruppe als Ersatzbild einer allgemeinen Mannigfaltigkeit in den verschiedensten Auffassungen dieses Begriffes (z. B. Galoissche Gruppe für algebraische Zahlkörper, Fundamentalgruppe für topologische Räume usw.) erscheint, ist im wesentlichen dasselbe. Das hat einerseits die Annäherung der Methoden der Algebra und der Topologie zur Folge gehabt. Anderseits entstanden die Methoden, welche die entsprechenden Zweige der Gruppentheorie, die endlichen und die kontinuierlichen Gruppen, als Teile der allgemeinen Gruppentheorie zu betrachten gestatten. Die „lineare Gruppentheorie" ist eine wahre Brücke, welche diese beiden Zweige der Gruppentheorie verbindet. Gleichzeitig ist die Theorie der diskreten unendlichen Gruppen entstanden, welche auf einige Fragen der Topologie anwendbar ist.

Ich muss zuerst die moderne Auffassung des Begriffes „Galoissche Gruppe" darlegen, welche von der älteren Auffassung etwas abweicht. Es ist mir schwer zu sagen, von wem die neuere Auffassung herrührt. Die ältere Galoissche Theorie betrachtete die Elemente der Galoisschen Gruppe, die Substitutionen (oder die Permutationen), als Vertauschungen unter den Wurzeln einer erzeugenden Gleichung (die auch reduzibel sein kann), welche sämtliche Relationen zwischen diesen Wurzeln nicht stören. Die moderne Galoissche Theorie betrachtet dagegen Übergänge, welche gleichzeitig alle Grössen eines (normalen) Körpers K erleiden, ohne die zwischen ihnen bestehenden Relationen zu stören. Mit anderen Worten, jedes Element der Galoisschen Gruppe ist eine Abbildung des Körpers K auf sich selbst, oder, wie man in der Gruppentheorie zu sagen pflegt, ein Automorphismus, d. h. ein solcher Übergang aller Grössen des Körpers in Grössen desselben Körpers, welcher die Summe und das Produkt in die Summe bezw. das Produkt überführt.

Es ist für die Galoissche Theorie die gegenseitige Zuordnung der Unterkörper von K und der Untergruppen seiner Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ vor allem wesentlich. Man kann das genauer wie folgt formulieren:

Man ordne jedem Unterkörper U von K die grösste Untergruppe $\mathfrak{H}(U)$ von $\mathfrak{G}$ zu, die die Grössen von U nicht ändert. Andererseits ordne man jeder Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ den grössten Unterkörper $U(\mathfrak{H})$ von K zu, deren Grössen sich nicht gegenüber $\mathfrak{H}$ ändern. Ist $U_1 > U_2$, so ist $\mathfrak{H}(U_1) < \mathfrak{H}(U_2)$ und umgekehrt. Ausserdem gilt:

$$\mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] \geqq \mathfrak{H} \qquad\qquad U[\mathfrak{H}(U)] \geqq U.$$

Mann kann aber die Galoissche Theorie nur dann ohne weiteres entwickeln, wenn es gilt:

$$\mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] = \mathfrak{H}, \tag{1}$$

$$U[\mathfrak{H}(U)] = U. \tag{2}$$

Damit (1) gelte, muss K über seinem Rationalitätsbereich endlich sein (Krull)[1].

Damit (2) gelte, muss K über seinem Rationalitätsbereich von der 1. Art sein (Steinitz; Baer-Hasse)[2].

Ist K unendlich, so hat W. Krull den Hauptsatz der Galoisschen Theorie auf diesen Fall erweitert, indem er nicht alle, sondern nur die abgeschlossenen Untergruppen in Betracht zog. Dazu führte er den Begriff der Umgebung eines Elements der Galoisschen Gruppe ein, welcher auf dem Verhalten eines endlichen Normalunterkörpers von K gebaut ist und allen Hausdorffschen Axiomen genügt. Dann definierte er nach einem bekannten topologischen Muster die Begriffe von Häufungselementen und abgeschlossenen Untergruppen und erhielt folgendes merkwürdiges Resultat:

Damit für eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}[U(\mathfrak{H})] = \mathfrak{H}$ gelte, muss $\mathfrak{H}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathfrak{G}$ sein.

Die Bedingungen für das Bestehen der Relation (2) wurden von R. Baer ausführlich untersucht.

Es ist viel schwieriger, die Galoissche Gruppe für die Fälle zu definieren, wo der zu untersuchende Körper K einen höheren Transzendenzgrad hat als sein Rationali-

[1]) Math. Ann. 100 (1928), S. 687—698.

[2]) E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper. Neuausgabe 1930. Anhang von R. Baer und H. Hasse.

tätsbereich. Der Grund dazu liegt darin, dass die universelle Norm eines solchen Körpers (d. h. der Körper, welcher alle mit den Unterkörpern von K konjugierten Körper enthält) ein unendlicher Körper ist, dessen Definition schwer analytisch zu fassen ist. Um eine Gruppe, die die Haupteigenschaften der Galoisschen Gruppe besitzen soll, mindestens theoretisch aufzustellen, kann man folgendes Schema skizzieren. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die erzeugenden Grössen eines Körpers K, zwischen denen gewisse algebraische Relationen bestehen mögen, die wir mit (1) bezeichnen wollen. Man kann jeden Unterkörper U von K analog durch erzeugende Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ bestimmen, wobei die ξ_i sich rational durch die x_i ausdrücken:

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Gleichungen

$$(2) \qquad \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmen einen neuen Körper, dessen Erzeugenden ($x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; $y_1', y_2', \ldots$) durch die Relationen (1) und (2) verbunden sind. Der Übergang von $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ wird als Transmutation von K oder Permutation seiner Relativnorm bezeichnet. Durchläuft U sämtliche Unterkörper von K, so erzeugen die entsprechenden Relativnormen die gesuchte universelle Norm. Das Kompositum sämtlicher soeben aufgestellter Permutationen ist eine Gruppe, die alle Haupteigenschaften der Galoisschen Gruppe besitzt.

Man kann die Galoissche Gruppe eines Körpers algebraischer Funktionen etwas anders aufstellen, indem man nicht die Funktionen des Körpers, sondern die Gesamtheit ihrer Wertesysteme ins Auge fasst, die die sog. absolute Riemannsche Fläche bilden. Dann führt jede Transformation der Galoisschen Gruppe jeden Wert einer Funktion von K in einen anderen Wert über, so dass zwischen den Werten verschiedener Funktionen dieselben Relationen bestehen bleiben. Da jede Funktion durch die Gesamtheit ihrer Werte vollständig bestimmt ist, so werden durch eine solche Transformation auch die Funktionen bestimmt, in welche die gegebenen Funktionen übergehen. Die verschiedenen Monodromiegruppen, die gewisse Rationalitätsbereiche in Ruhe lassen, sind in dieser Gruppe enthalten. Es kann sehr wohl eintreten, dass eine Transformation einige Funktionen von K aus K hinausführt. Das findet im Falle einer unabhängigen Veränderlichen seinen Ausdruck darin, dass eine durch ihre Null- und Unendlichkeitsstellen bis auf eine multiplikative Konstante bestimmte Funktion

$$f = \frac{\mathfrak{p}_1' \, \mathfrak{p}_2' \ldots \mathfrak{p}_m'}{\mathfrak{p}_1 \, \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m}$$

in ein Produkt

$$\frac{\bar{\mathfrak{p}}_1' \, \bar{\mathfrak{p}}_2' \ldots \bar{\mathfrak{p}}_m'}{\bar{\mathfrak{p}}_1 \, \bar{\mathfrak{p}}_2 \ldots \bar{\mathfrak{p}}_m}$$

übergeht, worin der Zähler und der Nenner in verschiedenen Idealklassen liegen. Jede Transformation, welche Divisoren in äquivalente Divisoren überführt, gehört zur sogenannten Gruppe der Transformationen in sich, die eine analoge Rolle spielt wie die von A. Loewy eingeführte Gruppe der automorphen Transformationen.

Die Fragen der algebraischen Zahlkörpertheorie, die die algebraischen Zahlen in bezug auf ihre Rationalität betrachten, sind meistens durch die Methoden der Galoisschen Theorie lösbar. Enthalten aber die zu untersuchenden Körper gewisse transzendente (veränderliche) Grössen, so lassen die diesen Körpern entsprechenden Strukturfragen nicht eine unmittelbare gruppentheoretische Einkleidung zu. Wenn ich nichtsdestoweniger diese Fragen in den Galoisschen Ideenkreis einschliesse, so mache ich dies aus folgenden Gründen. Es ist erstens nicht naturgemäss, die Galoissche Theorie als denjenigen Ideenkreis zu definieren, dessen Probleme mit Hilfe der Galoisschen Gruppe gelöst werden können, da die Galoissche Gruppe ein Lösungsmittel ist, während sogar dieselben Probleme mit Hilfe verschiedener Mitteln lösbar sein können, so dass ein Lösungsmittel keineswegs geeignet ist, ein Wissenschaftsgebiet abzugrenzen. Zweitens können wir von vornherein nicht sagen, ob ein zu untersuchendes Problem nicht mit Hilfe eines zweckmässig eingeführten Begriffes der Galoisschen Gruppe gelöst werden kann. Es ist viel zweckmässiger, die Galoissche Theorie als den Problemenkreis zu definieren, dessen Probleme sich mit der rationalen Abhängigkeit von Körpern und einzelnen Körpergrössen beschäftigen.

I. *Identität von zwei algebraischen Körpern.* Ein Körper ist keineswegs durch seine Galoissche Gruppe bestimmt. Man kann vielmehr verschiedene Körper mit isomorphen Gruppen aufstellen. Die Frage nach der Identität von Körpern liegt also eigentlich ausser dem Rahmen der Galoisschen Theorie. Ist K insbesondere ein Zahlkörper, so ist die Frage wesentlich zahlentheoretisch.

Es gibt dennoch eine rein algebraische Methode für die Lösung des Identitätsproblems. Sind nämlich K und K_1 die zu untersuchenden Zahlkörper, deren Gruppen mit $\mathfrak{G}$ isomorph sind, so hat das Kompositum KK_1 im allgemeinen das direkte Produkt $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ als Galoissche Gruppe. Haben aber K und K_1 einen nicht rationalen Durchschnitt, so verwandelt sich die Gruppe von KK_1 in einen echten Teiler von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Sind insbesondere K und K_1 identisch, so ist die Gruppe von KK_1 mit $\mathfrak{G}$ isomorph. Daraus kann man ein brauchbares Kriterium der Identität von K und K_1 herleiten. Sind nämlich

$$(3) \quad x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_{n-1} y + b_n = 0$$

die Gleichungen, deren einzelne Wurzeln die Körper K bezw. K_1 erzeugen, so ist $K = K_1$ dann und nur dann, wenn eine der Grössen

$$x_1^k\, y_1 + x_2^k\, y_2 + \ldots + x_n^k\, y_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

rational ist, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sämtliche Wurzeln der Gleichungen (3) bedeuten. Jede der Grössen $x_1^k\, y_1 + x_2^k\, y_2 + \ldots + x_n^k\, y_n$ genügt einer Gleichung vom Grade $n!$, deren Koeffizienten man rational durch die a_i, b_i ausdrükken kann. Die Körper K und K_1 sind dann und nur dann identisch, wenn diese Gleichung wenigstens eine rationale Wurzel besitzt. Hat dabei $\mathfrak{G}$ bekannte Normalteiler, so kann man den Grad dieser („gemischten") Gleichung mit Hilfe gewisser Resolventen erniedrigen.

B. Delaunay und ich[3]) haben in russischen Arbeiten alle Rechnungen für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ durchgeführt.

Ist aber K ein algebraischer Funktionskörper, so lässt die Galoissche Theorie keine Anwendung auf die Lösung des Identitätsproblems zu. Besitzt K nur eine unabhängige Variable, so ist das Problem mit Hilfe funktionentheoretischer Mittel lösbar. Hängt K dagegen von mehreren unabhängigen Veränderlichen ab, so ist das Problem im allgemeinen unerledigt. Es gehört zum Gebiete, in welchem die alten deutschen und die italienischen Geometer mehrere äusserst wichtige Resultate geometrisch erhalten haben. Dennoch fürchte ich, dass wir darüber noch heute folgende Phrase wiederholen müssen, die im Züricher Vortrag von F. Enriques enthalten ist:

„Malheureusement la plupart de ces problèmes demeurent aujourd'hui sans réponse, et les contributions qu'on a portées dans ce champs de recherches ressemblent en vérité à de rares flambeaux au milieu d'une obscurité épaisse."

II. *Rationale Minimalbasis.* Betrachten wir den Körper K_n aller rationalen Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so entsteht die Frage nach allen möglichen Typen seiner Unterkörper. Man kann leicht „triviale Typen" solcher Körper aufstellen: man nehme nämlich eine Anzahl $m \leqq n$ funktional unabhängiger Elemente von K_n (d. h. rationaler Funktionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$) als erzeugende Elemente eines Unterkörpers. Der auf diese Weise gebildete Körper ist offenbar entweder mit K_n oder mit dem Körper K_m der rationalen Funktionen von m $(m < n)$ Veränderlichen isomorph. Man kann aber die Existenz von anderen Körpern erwarten, deren erzeugende Elemente notwendig durch eine Relation verbunden sind. Es entsteht die Frage, ob die „trivialen" Typen von Unterkörpern alle möglichen Typen erschöpfen. Mit anderen Worten, man fragt sich nach der Existenz eines Systems unabhängiger Elemente des Unterkörpers, durch welche alle Elemente dieses Unterkörpers rational darstellbar sind. Ein solches System nennt man rationale Minimalbasis.

[3]) Journal des sciences pures et appliquées. Odessa. T. I., No. 2 (1922), russisch.

Diese Frage wurde für $n = 1$ von P. Lüroth[4]) und für $n = 2$ von G. Castelnuovo[5]) bejahend beantwortet. Die Beweise beruhen auf den Methoden der algebraischen Geometrie. Für den Fall $n = 3$ haben G. Fano[6]) und F. Enriques[7]) ein Gegenbeispiel gefunden.

Das Problem der rationalen Minimalbasis hat eine Anwendung in der klassischen Galoisschen Theorie, nämlich in der Frage nach der Existenz von Körpern mit vorgeschriebener Galoisscher Gruppe. Um diese letztere Frage zu beantworten, ist es nötig, das Problem der rationalen Minimalbasis nur für den Fall zu lösen, dass der zu untersuchende Unterkörper den Körper der elementar-symmetrischen Funktionen eines Systems erzeugender Elemente von K_n enthält. Bei dieser Beschränkung ist das Problem der rationalen Minimalbasis weder erledigt noch widerlegt.

Dieses Problem kann auch als Problem der Identität von Körpern aufgefasst werden. Denn sind unter den erzeugenden Elementen des Unterkörpers $\bar{K}$ von K_n etwa m ($m \leqq n$) funktional unabhängig, so wird die Frage darauf zurückgeführt, die Identität (genauer: Isomorphismus) von $\bar{K}$ und K_m nachzuweisen.

Das Problem von Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe kann in folgenden zwei Arten aufgefasst werden:

A) Man finde irgendwelche Gleichungen, deren Gruppe mit einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph ist.

B) Man stelle ein Verfahren zur Bestimmung von Gleichungen auf, deren Gruppe mit $\mathfrak{G}$ isomorph ist. Dieses Verfahren soll alle Gleichungen dieser Art erschöpfen, falls es hinlänglich weit fortgesetzt wird.

E. Noether hat das Problem *A* auf das Problem der Rationalbasis zurückgeführt. Man kann aber zeigen, dass auch das Problem *B* auf das Problem der Rationalbasis zurückgeführt werden kann. Dazu benutze man nicht den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz[8]), sondern ein Verfahren von M. Bauer[9]), nach welchem man Kongruenzen modulo p betrachtet, wobei p eine Primzahl bedeutet. Das Problem *A* führt uns aber zu einer ganzzahligen Lösung einer gewissen Diophantischen Gleichung, die (gebrochene) rationale und auch ganzzahlige p-adische Lösungen besitzt.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass die gesuchte Rationalbasis nicht rationalzahlig ist. Dann kann auch das entsprechende Problem der Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe nicht befriedigend lösbar sein, da die in den Koeffizienten auftretenden Irrationalitäten einen irrationalen Rationalitätsbereich erzeugen. Die Frage

[4]) Math. Ann. 9 (1876), S. 163—165.
[5]) Math. Ann. 44 (1894), S. 125—155.
[6]) Atti Acc. Torino 43 (1908), S. 973—981.
[7]) Math. Ann. 51 (1899), S. 134—153.
[8]) Crelle 110 (1892), S. 104—129.
[9]) Math. Ann. 64 (1907), S. 325—327.

nach einer rationalzahligen Rationalbasis wurde von F. Furtwängler[10]) und S. Breuer[11]) für den Fall zyklischer und metazyklischer Gruppen untersucht.

III. *Einfachste Auflösung von Gleichungen mit mehreren Veränderlichen.*

Es sei ein Körper K der rationalen Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben, zwischen denen eine algebraische Relation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

stattfindet (der Fall mehrerer Relationen kann leicht auf diesen Fall zurückgeführt werden). Man soll neue erzeugende Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ von K so wählen, dass die zwischen den y_i bestehende Gleichung von möglichst niedrigem Grade in bezug auf eine von ihnen, etwa von y_1, ist. Was kann man von dieser Gradzahl sagen?

Diese Frage wurde von Enriques am ersten Internationalen Mathematiker-Kongress (Zürich, 1897) ausführlich behandelt.

Ich will einige der dort betrachteten schönen Resultate wiederholen[7]).

1. Wir fassen x_1, x_2 als Veränderliche und $x_3, x_4, \ldots, x_n$ als Parameter auf. Ist das Geschlecht der Gleichung $f(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = 0$ beständig gleich Null, so kann man eine Veränderliche t derart auswählen, dass x_1, x_2 sich rational durch $t, x_3, x_4, \ldots, x_n$ und eine Quadratwurzel einer rationalen Funktion von $x_3, x_4, \ldots, x_n$ ausdrückt (M. Noether)[12]).

Ist $n = 3$, so kann man sich durch zweckmässige Wahl von t auch von der quadratischen Irrationalität befreien.

Man kann vermuten, dass dieser Satz von Bedeutung für die Auffindung von Körpern mit vorgeschriebener Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Das letzte Problem scheint leichter lösbar zu sein, wenn die Gruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{G}$ von ungerader Ordnung ist, wobei $\mathfrak{K}$ den *Holomorph* der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet.

2. Ist das Geschlecht p der Gleichung $f(x_2, x_3) = 0$ grösser als 1, so kann der Körper K durch Adjunktion einer Irrationalität vom Grade $\leqq 2p - 2$ gelöst werden.

3. Nur im Falle $p = 1$ kann man die obere Grenze für den Grad dieser Irrationalität nicht von vornherein angeben.

IV. *„Wahrer Transzendenzgrad" eines Oberkörpers.* Es sei ein Körper k der rationalen Funktionen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gegeben, die miteinander eventuell durch eine algebraische Relation verbunden sein können. Es sei ausserdem ein Oberkörper K von demselben Transzendenzgrad gegeben, dessen erzeugende Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit den u_i durch die Gleichungen

[10]) Sitzber. Wiener Akad. 134 (1925), S. 69—80.
[11]) Crelle 156 (1927), S. 13—42.
[12]) Math. Ann. 3 (1871), S. 221—227.

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

verbunden sind. Man finde einen Unterkörper K_1 von K derart, dass

1. das Kompositum von K_1 und k den Körper K ergibt;
2. der Transzendenzgrad von K_1 möglichst klein ist.

Den Transzendenzgrad von K_1 wollen wir den *wahren Transzendenzgrad* von K/k nennen. Es ist ersichtlich, dass jedes Problem der Körpertheorie wesentlich vereinfacht wird, wenn man den Transzendenzgrad eines zu untersuchenden Körpers vermindert. Darin liegt die Bedeutung dieses Problems.

Dieses Problem verwandelt sich als Spezialfall in das sogenannte Resolventenproblem, welches folgendermassen formuliert werden kann:

Es sei eine algebraische Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{5}$$

mit den unbeschränkt veränderlichen Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gegeben. Man finde eine Tschirnhausensche Transformation dieser Gleichung derart, dass die Koeffizienten der transformierten Gleichung möglichst wenige veränderliche Parameter enthält. Dabei schliessen wir in den Koeffizientenkörper eine zu einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörende rationale Funktion Φ der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Gleichung (5) ein.

Dieses Problem ist nichts anderes als das sogenannte Kleinsche Resolventenproblem[13]). Um es zu lösen, führe man die *Einkleidungsgruppe* (kurz E. G.) Γ von $\mathfrak{G}$ ein, d. h. die kontinuierliche Gruppe, welche eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe als Teiler enthält. Dabei soll weder ein echter Teiler von Γ noch eine echte Faktorgruppe von Γ eine mit $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe enthalten.

Ist insbesondere $\mathfrak{G}$ eine einfache Gruppe, so ist ihre E. G. Γ auch einfach.

Das gestellte Resolventenproblem lässt sich mit Hilfe folgenden Satzes beantworten[14]):

Satz. Eine algebraische Gleichung mit unbeschränkt veränderlichen Koeffizienten besitzt eine k-parametrige Resolvente dann und nur dann, wenn ihre Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ eine E. G. Γ hat, welche im k-dimensionalen Raume darstellbar ist (wir wollen sagen: Γ ist eine k-Gruppe).

Dieser Satz wurde im wesentlichen von F. Klein für den Fall bewiesen, dass Γ mit einer k-Gruppe nicht nur *isomorph*, sondern auch *ähnlich* ist. Um diese Restriktion zu vermeiden, machte Klein einen Umweg. Er transformierte nämlich die Gleichung (5) vorläufig in eine Gleichung, deren Wurzeln durch die Relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0. \qquad (n = 5)$$

[13]) *F. Klein*, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. 2, Berlin 1922, S. 255—504.
[14]) Math. Ann. 104 (1931), S. 459—471; 105 (1931), S. 240—255.

verbunden sind. Man kann aber diesen Satz ohne diese Restriktion beweisen, indem man das sogenannte Cartansche Prinzip anwendet, welches in folgendem besteht:

Sind zwei kontinuierliche Gruppen Γ und Γ_1 isomorph, aber nicht ähnlich, so kann man die Gruppe Γ so erweitern, dass man aus ihr die Gruppe Γ_1 erhält, indem man auf die gewissen Funktionen der *verlängerten* Gruppe Γ entsprechenden Variablen die Transformationen von Γ ausübt[15]).

Der soeben erwähnte Satz gilt nicht ohne weiteres. Die in Rede stehenden Transformationen können Irrationalitäten erzeugen, welche Wurzeln einer Gleichung (*Nebenresolvente*) sind, deren Koeffizienten Invarianten der verlängerten Gruppe Γ sind. Über die Nebenresolvente weiss ich nur, dass sie höchstens einparametrig ist, wenn $\mathfrak{G}$ eine alternierende Gruppe ist.

Ist $\mathfrak{G}$ gegeben, so kann sie wohl mehrere nicht isomorphe E. G. besitzen. Besitzt $\mathfrak{G}$ kein Zentrum, so geschieht die Auffindung ihrer E. G. mit Hilfe der Methoden der linearen Gruppentheorie. Ich kann jetzt noch nicht sagen, ob die Anzahl verschiedener E. G. endlich ist oder nicht. Wollen wir aber nur diejenigen E. G. untersuchen, welche im Raume von möglichst kleiner Anzahl Dimensionen darstellbar ist, und ist $\mathfrak{G}$ einfach, so bietet die Frage keine prinzipiellen Schwierigkeiten, da sowohl alle Typen einfacher kontinuierlicher Gruppen, wie auch ihre Darstellbarkeitsfragen sehr vollständig von É. Cartan in seiner „Thèse" untersucht wurden.

Es entstehen noch zwei Fragen, die bei der Lösung unserer Aufgabe unentbehrlich sind:

1. Kann es geschehen, dass eine kontinuierliche Gruppe Γ eine k-Gruppe ist, während ihre Faktorgruppe Γ_1 nicht im k-Raum darstellbar sein kann?

Ist Γ_1 einfach, so kann diese Frage durch einen Satz beantwortet werden, der von W. Killing vermutet und E. E. Levi vollständig bewiesen wurde:

Besitzt eine Gruppe Γ eine einfache Faktorgruppe Γ_1, so besitzt sie auch einen mit Γ_1 isomorphen Teiler.

2. Kann es geschehen, dass $\mathfrak{G}$ nicht durch eine k-Gruppe eingekleidet werden kann, während dies von einer Gruppe $\mathfrak{K}$ gilt, die als $\mathfrak{G}$ eine Faktorgruppe enthält?

Das kann wirklich eintreten, wie das A. Wiman am Beispiel $n = 6$ zeigte[16]). Die Gruppe $\mathfrak{K}$ ist mit $\mathfrak{G}$ in bezug auf das Zentrum homomorph und gehört zur Klasse von sogenannten *Darstellungsgruppen*, die von I. Schur in seinen Arbeiten über die Darstellbarkeit von endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen untersucht wurden[17]). I. Schur hat gezeigt, dass die Anzahl von möglichen

[15]) C. R. 135 (1902), S. 851—854.
[16]) Math. Ann. 47 (1896), S. 531—556.
[17]) Crelle 127 (1904), S. 20—50; 132 (1907), S. 85—137.

Darstellungsgruppen endlich ist. Wenn wir demnach das Resolventenproblem für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ lösen, so ist es notwendig, die E. G. nicht nur von $\mathfrak{G}$, sondern auch von allen ihren Darstellungsgruppen aufzustellen.

D. Hilbert[18]) hat ein weiteres Problem über die Ketten von Resolventen mit möglichst kleiner Anzahl k von Parametern gestellt. Es folgt aus seinen Untersuchungen, dass für $n = 9$ $k \leqq 4$ ist. A. Wiman[19]) hat allgemein bewiesen, dass bei $n \geqq 9$ $n - k \geqq 5$ gilt. Man kann andererseits aus anderen Untersuchungen von Wiman[20]) schliessen, dass für das Kleinsche Problem bei $n \geqq 8$ $n - k = 3$ gilt. Darum liegt es nahe, dass das Hilbertsche Problem eine wesentliche Erweiterung des Kleinschen Problems ist. Der Grund dazu liegt darin, dass der für die klassische Galoissche Theorie gültige Satz von den natürlichen Irrationalitäten für den Fall des Resolventenproblems aufhört, gültig zu sein.

Das Resolventenproblem und seine Erweiterung — das Hilbertsche Problem nach den Ketten von Resolventen — sind zugleich extreme Probleme der klassischen Galoisschen Theorie und können als eine natürliche Erweiterung der ursprünglichen Grundaufgabe der Galoisschen Theorie, der Radikallösung, aufgefasst werden. Denn die Darstellung von Wurzeln durch Radikalausdrücke hat den Vorteil, dass sie erlaubt, die Wurzeln durch eine Folge von Operationen zu ermitteln, von denen jede nur mit einer Veränderlichen zu tun hat. Man kann demnach eine Tabelle bewerkstelligen, die jedem Radikand sein Radikal zuordnet, so dass solche Tabellen uns ermöglichen, Wurzeln aller auflösbaren Gleichung vom gegebenen Grade zu berechnen.

Die soeben erwähnte Eigenschaft ist keineswegs für auflösbare Gleichungen charakteristisch. Man kann vielmehr die Auffindung von Gleichungswurzeln durch Operationen ganz anderer Art aufstellen, von denen jeder diese Eigenschaft zukommt. Z. B. ist die allgemeine Gleichung 5ten Grades auf diese Weise lösbar (Bring; Klein). Das in Rede stehende Resolventenproblem ist eine Erweiterung dieser Aufgabe, indem man es nicht nur mit dem Fall $k = 1$ zu tun hat, sondern für jeden Fall einen möglichst kleinen Wert von k sucht.

[18]) Gött. Nachr. 1900, S. 280; Math. Ann. 97 (1926), S. 243—250.
[19]) Math. Ann. 52 (1890), S. 243—270.
[20]) Nova Acta Uppsala 1927, S. X + 3 — 8.

Sur la théorie des équations intégrales et ses applications

Par Torsten Carleman, Stockholm

La théorie des équations intégrales qui s'est développée très rapidement à la suite des travaux de Volterra, Fredholm et Hilbert, constitue aujourd'hui une importante branche de l'analyse mathématique, trop vaste pour qu'on puisse donner, dans une seule conférence, un exposé systématique de son développement. Je me bornerai à parler de certains chapitres choisis.

Remarques sur les théories générales

Les équations intégrales linéaires „proprement dites" sont des relations de la forme

$$A(x)\varphi(x) + \int_E K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, E le domaine d'intégration, $A(x)$, $K(x, y)$ et $f(x)$ des fonctions données. Il faut y adjoindre les équations à plusieurs variables qu'on obtient si l'on interprête x et y comme points dans des espaces à plusieurs dimensions.

Il est souvent utile de considérer les équations (1) comme cas particuliers des équations fonctionnelles linéaires

$$S(\varphi) = f, \tag{2}$$

où S est une transformation fonctionnelle linéaire, c'est-à-dire une opération satisfaisant aux relations

$$S(\varphi + \psi) = S(\varphi) + S(\psi), \quad S(c\,\varphi) = c\,S(\varphi),$$

c étant une constante arbitraire. Cela n'empêche pas que les équations (2) peuvent se réduire à la forme (1) au moyen des transformations convenables. On voit immédiatement que les généralisations suivantes de (1)

$$\sum_{p,q} A_{pq}\,\varphi^{(p)}[w_{p,q}(x)] + \int_E K(x, y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

$$\int \varphi(y)\,d_y K(x, y) = f(x)$$

sont des cas particuliers de (2).

En utilisant la représentation de fonctionnelles linéaires continues donnée par M. Hadamard on est conduit à considérer des équations linéaires de la forme

$$\lim_{n \to \infty} \int G_n(x, y)\, \varphi(y)\, d y = f(x) \tag{3}$$

où $G_n(x, y)$ est une suite donnée de fonctions continues. Il semble que cette classe d'équations embrasse tous les cas considérés jusqu'ici.

Equivalence de la théorie des équations intégrales linéaires et celle des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

Remarquons d'abord que les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues peuvent se ramener à des équations intégrales. Cela peut se faire de plusieurs manières. La plus simple est la suivante. Considérons un système d'équations linéaires sous la forme

$$x_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_q = a_p \quad (p = 1, 2, \ldots .). \tag{4}$$

Si nous définissons un noyau $K(x, y)$ par les relations

$$\begin{array}{ll} K(x, y) = c_{pq} & \text{pour } p - 1 < x < p,\ q - 1 < y < q \\ K(x, y) = 0 & \text{pour } x \text{ ou } y = \text{nombre entier} \end{array}$$

et une fonction $f(x)$ par les conditions

$$\begin{array}{ll} f(x) = a_p & \text{pour } p - 1 < x < p \\ f(x) = 0 & \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{array}$$

et si nous faisons correspondre à la suite $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ une fonction $\varphi(x)$:

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) = x_p & \text{pour } p - 1 < x < p \\ \varphi(x) = 0 & \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{array}$$

nous trouverons que le système (4) est équivalent à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} K(x, y)\, \varphi(y)\, d y = f(x).$$

La proposition inverse, c'est-à-dire que chaque équation fonctionnelle linéaire peut se réduire à un système d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, est moins évidente. Elle est démontrée sous des conditions assez générales si l'on se borne à chercher des solutions à carré intégrable. Considérons le cas suivant. Soit $K(x, y)$ un noyau pour lequel

$$\int_a^b |K(x, y)|^2\, d y = k(x)^2$$

existe presque partout et proposons-nous de déterminer toutes les solutions à carré intégrable de l'équation:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x). \tag{5}$$

Soit $P_1(x), P_2(x) \ldots P_n(x) \ldots$ un système orthogonal fermé de fonctions à carré intégrable. Posons

$$\varrho(x) = \frac{1}{k(x) + 1}$$

et orthogonalisons le système des fonctions $\varrho(x)\, P_\nu(x)$. Désignons le système orthogonal ainsi obtenu par $\psi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2 \ldots)$. Il est clair que $f(x)\, \varrho(x)$ doit être à carré intégrable. En multipliant (5) par $\overline{\psi_\nu}(x)$ et en intégrant, il vient

$$\varphi_p - \lambda \sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}\, \varphi_q = f_p \qquad p = 1, 2 \ldots \tag{6}$$

où l'on a posé

$$\varphi_p = \int_a^b \varphi(x)\, \overline{\psi_p(x)}\, dx, \qquad k_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \overline{\psi_q(x)}\, \psi_q(y)\, dx\, dy$$

$$f_p = \int_a^b f(x)\, \overline{\psi_p(x)}\, dx.$$

A chaque solution de carré intégrable de (5) il correspond une solution du système (6) telle que $\Sigma\, |\varphi_p|^2$ converge. On démontre que la réciproque est vraie en utilisant le théorème suivant qui s'obtient par un procédé donné par M. Weyl. Soit $F(x)$ une fonction telle que

$$\int_a^b |\varrho(x)\, F(x)|^2\, dx$$

converge. Si alors la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \int_a^b F(x)\, \psi_\nu(x)\, dx \right|^2 \tag{7}$$

converge il faut que l'intégrale $\int_a^b |F(x)|^2\, dx$ existe et soit égale à la série (7). Si les coefficients de Fourier sont tous nuls il faut que $F(x)$ s'annule aussi.

Ecrivons maintenant l'équation (3) sous la forme

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 G_n(x, y)\, d\, \psi(x) = f(x) \tag{8}$$

et supposons que $f(x)$ soit continue dans l'intervalle (0,1) et que le premier membre tende uniformément vers $f(x)$. Nous nous proposons de ramener le problème de déterminer les solutions à variation bornée de (8) à la résolution d'un système d'équations à une infinité d'inconnues. Posons

$$K_1(x, y) = G_1(x, y)$$

$$K_p(x, y) = G_p(x, y) - G_{p-1}(x, y) \qquad p \geq 2$$

et soient $\xi_1\ \xi_2 \ldots\ \xi_n \ldots$ une infinité de nombres partout denses dans l'intervalle (0, 1). Cela posé, nous pouvons remplacer (8) par les équations

$$\sum_{p=1}^{\infty} \int_0^1 K_p(\xi_m, y)\, d\,\psi(y) = f(\xi_m) \qquad m = 1, 2 \ldots$$

En prenant comme variables inconnues les quantités à deux indices

$$\psi_{n,\nu} = \psi\left(\frac{\nu}{2^n}\right) - \psi\left(\frac{\nu-1}{2^n}\right) \qquad \begin{array}{l} \nu = 1, 2 \ldots 2^n \\ n = 0, 1, \ldots . \end{array}$$

il s'ensuit

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\{ K_p(\xi_m, 1)\,\psi_{0,1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2^n} \left[K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu} + K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu-1}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu-1} \right.\right.$$
$$\left.\left. - K_p\left(\xi_m, \frac{\nu}{2^n}\right) \psi_{n,\nu} \right] \right\} = f(\xi_m).$$

En introduisant les variables auxiliaires

$$(9)\quad \gamma_{m,n}^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{2^n} \left[K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu} + K_p\left(\xi_m, \frac{2\nu-1}{2^{n+1}}\right) \psi_{n+1, 2\nu-1} - K_p\left(\xi_m, \frac{\nu}{2^n}\right) \psi_{n,\nu} \right]$$

$$(10)\qquad \omega_m^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{m,n}^{(p)} + K_p(\xi_m, 1)\,\psi_{0,1}$$

on trouve

$$(11)\qquad \sum_{p=1}^{\infty} \omega_m^{(p)} = f(\xi_m)$$

A ces relations il faut ajouter les identités

$$(12)\qquad \psi_{n,\nu} = \psi_{n+1, 2\nu} + \psi_{n+1, 2\nu-1}$$

et les inégalités

$$\sum_{\nu=1}^{2^n} |\psi_{n,\nu}| < \text{constante}.$$

Le problème posé se trouve ainsi ramené à la résolution du système (9), (10), (11), (12) où $\psi_{n,\nu}$, $\gamma_{m,n}^{(p)}$, $\omega_m^{(p)}$ figurent comme inconnues.

Problèmes divers concernant la résolution des systèmes d'équations à une infinité d'inconnues.

Grâce aux travaux de Poincaré, v. Koch, Hilbert, Dixon, Schmidt, F. Riesz, Toeplitz, Helly et d'autres nous possédons une série de méthodes plus ou moins générales pour traiter des systèmes d'équations de la forme

$$(13) \qquad L_p(x) = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_q = a_p \qquad p = 1, 2 \ldots .$$

Dans toutes ces théories on se pose le problème de déterminer toutes les solutions $(x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$ qui satisfont à certaines conditions C de convergence ou de croissance (*p. ex.* $|x_n|$ borné, $\Sigma\, |x_n|^p$ convergente) données à priori et l'on impose à la matrice (c_{pq}) des restrictions qui permettent d'assurer la convergence absolue des $L_p(x)$ pour toutes les suites x_n qui satisfont aux conditions C. Cette méthode de traiter la question est très souvent celle qui est la plus utile pour les applications. Or, il existe des cas où l'on est conduit à considérer le problème plus général que voici: *Rechercher toutes les suites* $(x_1, x_2 \ldots x_n \ldots)$ *qui rendent les séries* $L_p(x)$ *convergentes et égales aux quantités données* a_p. Il semble que cette question n'a été traitée que dans des cas particuliers (voir: E. Borel. Ann. de l'Ecole normale 1895, O. Toeplitz: Über zeilenfinite Gleichungssysteme). Nous nous proposons d'indiquer une méthode qui permet d'attaquer ce problème et de le transformer en un autre qui paraît être plus simple.

Supposons d'abord que l'équation $L_1(x) = a_1$ contienne toutes les variables $x_1\, x_2 \ldots$ et que les $L_p(x)$ soient linéairement indépendantes. Etant donnés des nombres entiers positifs $m_1\, m_2 \ldots m_n$ nous chercherons le minimum $R(m_1, m_2, \ldots m_n)$ de

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} x_\nu|^2$$

lorsque les inégalités

$$\begin{aligned}
&(\sum_{q=1}^{\nu} c_{1q}\, x_q - a_1) \leq 1 \qquad m_1 < \nu \leq m_1 + m_2 \\
(14)\quad &(\sum_{q=1}^{\nu} c_{pq}\, x_q - a_p) \leq \frac{1}{2} \qquad m_1 + m_2 < \nu \leq m_1 + m_2 + m_2, \; p = 1, 2. \\
&\quad \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot\; \cdot \\
&(\sum_{q=1}^{\nu} c_{pq}\, x_q - a_p) \leq \frac{1}{n-1}, \; m_1 + m_2 + \ldots m_{n-1} < \nu \leq m_1 + m_2 + \ldots m_n, \; p = 1, 2 \ldots, n-1
\end{aligned}$$

sont remplies. Si ces inégalités sont incompatibles nous poserons $R(m_1, m_2 \ldots m_n) = \infty$. A cause de l'indépendance des $L_p(x)$ on est sûr que R est une quantité finie lorsque m_1, est suffisamment grand. On voit aussi que $R(m_1\, m_2 \ldots m_n)$ est une fonction non croissante des variables $m_2 \ldots m_n$. Nous obtenons ainsi, par des calculs algébriques, une infinité dénombrable de quantités

$$R\,(m_1, m_2 \ldots m_n) \qquad 1 \leq m_\nu < \infty \qquad n = 2, 3 \ldots .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution du système (13) est qu'on puisse trouver une suite de nombres positifs $\mu_1\,\mu_2 \ldots \mu_r \ldots .$ telle que

$$\lim_{r \to \infty} R\,(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_r)$$

soit finie.

Le même critère est applicable aussi dans le cas où aucune des séries $L_p\,(x)$ ne contient toutes les variables mais la démonstration est dans ce cas un peu plus compliquée. On peut d'ailleurs énoncer le critère sous d'autres formes p. ex. la suivante: Pour que les équations (13) admettent une solution il faut et il suffit qu'il existe une suite $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ telle que les systemes d'inégalités soit compatibles quel que soit n[1]).

Nous pouvons aussi indiquer un procédé pour trouver (théoriquement) les solutions dans les cas où elles existent. Ajoutons finalement que la méthode esquissée plus haut est aussi applicable aux systèmes d'équations non linéaires.

Si c_{pq} peut s'écrire

$$c_{pq} = f\,(p, q)$$

où $f\,(p, q)$ est une fonction analytique simple des variables p et q, on peut souvent traiter le système (13) au moyen des méthodes de la théorie des fonctions analytiques. Supposons par exemple que $f\,(x, y)$ soit une fonction rationnelle

$$f\,(x, y) = \frac{a_0\,(x) + a_1\,(x)\,y + \ldots a_n\,(x)\,y^n}{b_0\,(x) + b_1\,(x)\,y + \ldots b_m\,(x)\,y^m}$$

On démontre d'abord la proposition suivante: Si une série de la forme

$$\Phi\,(x) = \sum_{q=1}^{\infty} f\,(x, q)\,x_q$$

converge pour une valeur ξ, telle que $a_n\,(\xi) \neq 0$, elle converge pour toutes les valeurs x différentes des racines de $b_m\,(x) = 0$ et représente une fonction méromorphe dans tout le plan des x. Notre problème est ainsi ramené à la détermination d'une fonction méromorphe dont on connaît les pôles, certaines relations entre les résidus, et les valeurs pour $x = 1, 2, \ldots n \ldots .$ On peut résoudre cette question dans des cas étendus. Je me bornerai à énoncer le résultat simple suivant: Si a n'est pas un nombre réel négatif, le système d'équations homogènes

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p + a\,q}\,x_q = 0$$

n'admet pas d'autre solution que $x_1 = x_2 = \ldots x_n \ldots = 0$.

[1]) On transforme ainsi le système (13) en un système infini d'inégalités dont chacune ne contient qu'un nombre fini des variables $m_1, m_2, \ldots m_n \ldots$

Problèmes des moments généralisés.

Il est presque évident que les systèmes d'équations linéaires

$$\int_a^b a_n(y)\,\varphi(y)\,d\,y = c_n \qquad n = 1, 2.. \tag{15}$$

$$\int_a^b a_n(y)\,d\,\varphi(y) = c_n \tag{16}$$

peuvent se réduire formellement à des équations intégrales. En introduisant un noyau $K(x, y)$ définie par les relations

$$\begin{aligned} K(x, y) &= a_n(y) && \text{pour } n - 1 < x < n \\ K(x, y) &= 0 && \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{aligned}$$

et en posant

$$\begin{aligned} f(x) &= c_n && \text{pour } n - 1 < x < n \\ f(x) &= 0 && \text{pour } x = \text{nombre entier} \end{aligned}$$

on trouve que les systèmes (15) et (16) sont équivalents aux équations

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,d\,y = f(x)$$

$$\int_a^b K(x, y)\,d\,\varphi(y) = f(x).$$

Les systèmes (16) ont été étudiés d'une manière détaillée par M. F. Riesz. Il obtient en même temps un théorème important sur l'approximation des fonctions continues par des systèmes donnés de fonctions continues.

Il y a lieu de rappeler aussi à cette occasion les travaux récents de M. S. Bernstein sur les fonctions absolument monotones.

La théorie des formes quadratiques et les équations intégrales symétriques.

La théorie, créée par M. Hilbert, des formes quadratiques (où hermitiennes) à une infinité de variables en connexion avec la théorie des équations intégrales à noyau symétrique est certainement la plus importante découverte qui ait été faite dans la théorie des équations intégrales après les travaux fondamentaux de Fredholm.

Remarquons d'abord que les sujets d'études suivantes:

Formes hermitiennes à une infinité de variables;
Substitutions hermitiennes à une infinité de variables;
Equations intégrales hermitiennes;
Fonctionnelles linéaires hermitiennes;
sont équivalents.

En utilisant le langage de la théorie des substitutions, nous pouvons énoncer quelques-uns des résultats de M. Hilbert de la manière suivante. Soit (c_{pq}) une matrice hermitienne infinie mais „bornée" au sens de M. Hilbert. Désignons, pour abréger, par x, y, etc. des suites $x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$, $y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$ et par S ou $S\,(x)$ la substitution

$$x_p' = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq}\, x_q$$

où $\Sigma\, |x_q|^2$ est supposée convergente. Ecrivons, d'après M. Hilbert,

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu\, \overline{y_\nu}\ ^{1)}.$$

Cela posé, il existe une substitution hermitienne bornée (substitution spectrale) $\theta\,(\lambda) = \theta\,(x \mid \lambda)$ à variation bornée par rapport au paramètre réel λ et satisfaisant aux relations

$$\Delta\,\theta\,(\lambda) \cdot \Delta\,\theta\,(\lambda) = \Delta\,\theta\,(\lambda) \qquad [\Delta\,\theta\,(\lambda) = \theta\,(\lambda + \Delta\lambda) - \theta\,(\lambda)] \tag{17}$$

$$\Delta_1\,\theta\,(\lambda) \cdot \Delta_2\,\theta\,(\lambda) = 0 \qquad \text{si } \Delta_1 \text{ et } \Delta_2 \text{ n'ont pas des intervalles communs} \tag{18}$$

$$S \cdot \Delta\,\theta\,(\lambda) - \int_{\Delta} \lambda\, d_\lambda\, \theta\,(\lambda) = 0 \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda\, \theta\,(\lambda) = E = \text{substitution identique} \tag{20}$$

telle qu'on ait

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d_\lambda\, [\theta\,(x \mid \lambda), y] \tag{21}$$

$$S\,(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda\, \theta\,(x \mid \lambda) \tag{22}$$

$$[S\,(x), y] = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda\, [\theta\,(x \mid \lambda), y] \tag{23}$$

si (x, x) et (y, y) sont finis.

Les travaux de M. Hilbert sur la théorie des formes quadratiques et bilinéaires et ses applications ont été poursuivis par un grand nombre d'auteurs parmi lesquels nous mentionnons M. M. Hellinger, Toeplitz, F. Riesz, Weyl, Hilb, Plancherel, etc.

[1]) Nous appellerons (x, x) la norme de la suite (x).

Pour les applications il est important d'étendre la théorie de M. Hilbert aux matrices non bornées. Voici quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans cette direction. Considérons les matrices hermitiennes (c_{pq}) qui ne sont soumises qu'à la condition

$$\sum_{q=1}^{\infty} |c_{pq}|^2 \text{ convergente pour } p = 1, 2, \ldots .$$

Nous partagerons l'ensemble des matrices de cette catégorie en deux classes I et II suivant que le système d'équations

$$\lambda x_p - \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} x_q = 0$$

n'admettent pas ou admettent, pour des valeurs non réelles de λ, des solutions (non identiquement nulles) telles que $\Sigma |x_p|^2$ converge. La condition nécessaire et suffisante pour que (c_{pq}) soit de la classe I est que la relation

$$[S(x), y] = [x, S(y)]$$

ait lieu sous la seule condition que

$$(x, x)\ (y, y),\ [S(x), S(x)],\ [S(y), S(y)]$$

soient finis. Si (c_{pq}) est de la classe I, tous les résultats (17)—(22) subsistent. Il en est de même de la formule (23) si $[S(x), S(x)]$ est fini. Elle résulte dans ce cas de (21) et (19).

Si (c_{pq}) appartient à la classe II il existe une infinité de substitutions spectrales $\theta(x \mid \lambda)$ satisfaisant aux relations (19), (20), (21) (22) et en outre à l'équation

$$[\varDelta\,\theta \cdot \varDelta\,\theta(x \mid \lambda), x] \leq [\varDelta\,\theta(x \mid \lambda), x]. \tag{24}$$

Si le signe d'égalité a lieu ici pour toutes les suites (x) telles que $\sum_{\nu=1}^{\infty}(x_\nu)^2$ converge alors les relations (17) et (18) sont aussi remplies. Il existe une infinité de substitutions spectrales ayant cette propriété si (c_{pq}) est réel. Il en est de même si les systèmes

$$S(x) - \lambda E(x) = 0,\ S(x) - \lambda E(x) = 0$$

ont le même nombre de solutions à norme finie linéairement indépendantes.

Il y a lieu de parler à cette occasion de certains travaux récents par MM. Stone, J. v. Neumann, F. Riesz sur les transformations linéaires hermitiennes de l'espace hilbertien. Il me semble que le sujet considéré par ces auteurs est intimement lié à la théorie que nous venons d'exposer. Supposons que l'espace hilbertien H soit représenté par toutes les fonctions f à carré intégrable dans un domaine Ω. Soit D un sous-ensemble de H linéaire et partout dense dans H. Posons $(f, g) = \int_\Omega f \bar{g}\, d\,\omega$. L'objet des travaux cités plus haut est l'étude générale des transformations fonctionnelles linéaires $T(f)$ qui transforment les fonctions f de D en des fonctions à carré intégrable qui satisfont à la relation

$$[f, T(g)] = [T(f), g] \tag{25}$$

pour toutes les fonctions f et g de D.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ un système orthogonal fermé de fonctions appartenant à D. On voit immédiatement que $T(f)$ est complètement déterminé par la connaissance des $T(\varphi_\nu)$. Représentons maintenant l'espace H sur l'espace hilbertien à une infinité de variables H, au moyen des développements

$$f \sim \Sigma\, x_q \varphi_q$$

qui font correspondre à f une suite infinie (x) à norme finie et inversement. Posons

$$T(\varphi_p) \sim \Sigma\, \overline{c_{p\,q}}\, \varphi_q$$
$$T(f) \sim \Sigma\, y_q \varphi_q.$$

En appliquant la relation (25) on trouve

$$y_p = \Sigma\, c_{p\,q}\, x_q \qquad c_{p\,q} = \overline{c_{q\,p}}.$$

L'image de la transformation $T(f)$ dans l'espace H_1 est donc une substitution $S(x)$ du type que nous avons examiné plus haut. La notion d'hypermaximalité, introduite par M. Schmidt, qui joue un rôle fondamental dans le travail de M. v. Neumann peut s'interpréter ainsi: La condition nécessaire et suffisante pour que $T(f)$ soit hypermaximale est que la substitution $S(x)$ correspondante appartienne à la classe I. Les développements spectraux que nous avons trouvés pour $S(x)$ se traduisent immédiatement en des développements analogues pour $T(f)$.

Applications

Applications à la théorie des fonctions analytiques.

M. Hilbert a démontré que la théorie des équations intégrales permet de résoudre le problème suivant posé par Riemann: Déterminer une fonction analytique dans un domaine D lorsque on connaît une relation (linéaire) entre sa partie réelle et sa partie imaginaire à la frontière de D. Il a aussi traité le problème plus général que voici: Trouver n fonctions $f_\nu(z)$ de caractère rationnel à l'intérieur d'une courbe C et n fonctions $g_\nu(z)$ de caractère rationnel à l'extérieur de C telles qu'on ait sur C

$$f_p(z) = \sum_{q=1}^{n} c_{p\,q}(z)\, g_q(z) \qquad p = 1, 2 \ldots n,$$

$c_{p\,q}(z)$ étant des fonctions données définies sur C. Comme cas particulier M. Hilbert obtient une solution du problème de déterminer les équations différentielles linéaires qui admettent un groupe de monodromie donné. M. Plemelj a donné une autre méthode remarquable pour résoudre ces problèmes au moyen des équations intégrales. M. Uhler a utilisé des méthodes analogues pour généraliser la théorie des fonctions zetafuchsiennes. M. Hasemann a obtenu certaines généralisations des résultats de M. Hilbert cités plus haut.

Nous allons considérer le problème suivant: Etant donnée une courbe C rectifiable et une fonction $\theta(z)$ définie sur C qui transforme C en elle-même; rechercher les fonctions analytiques $f(z)$ qui satisfont à la relation

$$f[\theta(z)] = a(z) f(z) \quad \text{sur } C \quad [a(z) = \text{fonction donnée}]$$

et qui admettent les mêmes singularités qu'une fonction rationnelle $P(z)$ donnée à l'intérieur de C. Si aucune des itérées

$$\theta(z) \quad \theta_2(z) = \theta[\theta(z)],\ \theta_2(z) = \theta[\theta_3(z)]\ldots$$

ne se réduise pas à z le problème ne peut admettre de solutions que dans des cas très particuliers. Nous supposerons que $\theta_2(z) = z$ et que $\theta(z)$ décrit C en sens inverse lorsque la variable z parcourt C en sens direct. Pour que notre problème soit possible il faut qu'on ait

$$a(z)\, a[\theta(z)] = 1.$$

Supposons en outre que $P(z)$ soit une fonction rationnelle régulière à l'extérieur de C et s'annulant à l'infini. En appliquant l'intégrale de Cauchy on trouve une équation intégrale de la forme

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left[\frac{1}{z-x} - \frac{a(z)\, a[\theta(x)]\ \theta'(z)}{\theta(z) - \theta(x)}\right] f(z)\, dz = a[\theta(x)]\, P[\theta(x)] + P(x).$$

On voit que le noyau est borné si C est à courbure continue et si $\theta'(z)$ est une fonction continue.

Je dis que le problème fondamental sur l'existence des fonctions automorphes est un cas particulier de la question que nous avons posée. Considérons pour simplifier un groupe fuchsien dont un polygone générateur C est situé entièrement au-dessus de l'axe réel. Les substitutions fondamentales définissent une transformation involutoire $\theta(z)$ de C en elle-même. $\theta(z)$ est, en général, discontinue en les sommets de C. Pour que $f(z)$ soit une fonction automorphe appartenant au groupe donné il faut et il suffit qu'on ait

$$f[\theta(z)] = f(z) \ \text{ sur } C.$$

L'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left[\frac{1}{z-x} - \frac{\theta'(z)}{\theta(z)-\theta(x)}\right] f(z)\,dz = P(x) + P[\theta(x)]$$

qui correspond à ce problème est singulière à cause de la discontinuité de $\theta(z)$. Pour éviter cette difficulté nous remplacerons dans les calculs précédents $\frac{1}{z-x}$ par

$$G(z, x) = \frac{1}{z-x} + \sum_r \frac{1}{z-\xi_r(x)}$$

où $\xi_r(x)$ sont les transformées de x qui sont situées dans les transformées (en nombre limité) du polygone générateur dont les frontières ont des points communs avec C. On obtient ainsi l'équation

$$f(x) - \frac{1}{4\pi i}\int\limits_C \left\{G(z, x) - \theta'(z)\, G[\theta(z), \theta(x)]\right\} f(z)\,dz = \frac{P(x) + P[\theta(x)]}{2}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{(r)}\left[P(\zeta_r[x]) + P(\zeta_r[\theta(x)])\right]$$

qui est une équation régulière de Fredholm. En appliquant les théorèmes de Fredholm, nous pouvons, au moyen de cette équation, établir d'une manière simple les points essentiels de la théorie des fonctions fuchsiennes. Une méthode analogue est applicable aussi dans le cas où le polygone générateur a des points communs avec l'axe réel. Le même procédé est applicable aux fonctions teta-fuchsiennes et aux fonctions zéta-fuchsiennes.

Si l'on considère en particulier les fonctions doublement périodiques on obtient le résultat simple suivant: Les fonctions doublement périodiques de périodes ω_1 et ω_2 sont les solutions de l'équation intégrale

$$f(x) - \frac{1}{2\omega_1 i}\int\limits_0^{\omega_1}\left[\cot\frac{\pi}{\omega_1}(z-x-\omega_2) - \cot\frac{\pi}{\omega_1}(z-x+\omega_2)\right] f(z)\,dz =$$
$$= \frac{H(x) + H(x+\omega_1)}{2}$$

où $H(x)$ est une fonction meromorphe périodique de période ω_1, n'ayant pas des pôles à lexterieur da la bande

$$z = \omega_1 s + \omega_2 t, \quad -\infty < s < \infty, \quad 0 \leqq t < 1$$

et tendant vers zéro dans la direction de $\pm\,\omega_2$.

Ajoutons finalement que l'ensemble des fonctions analytiques régulières à l'intérieur du cercle d'unité E (et à carré intégrable dans E) peuvent s'obtenir comme fonctions fondamentales de l'équation intégrale hermitienne suivante

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\int_E \frac{1}{(1 - x\,y)^2} F(y)\, d\,\sigma.$$

Applications aux équations différentielles.

L'importance fondamentale de la théorie des équations intégrales pour les problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles linéaires, ordinaires ou partielles, est si bien connue qu'il est inutile d'y insister.

Nous dirons quelques mots d'un problème posé par Poincaré: Appliquer la théorie des équations intégrales linéaires à l'étude des systèmes d'équations différentielles non linéaires. Une solution de ce problème a été donnée par M. Fredholm en 1920. Il semble que, après Fredholm, c'est M. B. Koopman qui a publié le premier un résultat nouveaux dans cette direction. Il trouve que les propriétés des trajectoires d'un système d'équations différentielles canoniques sont intimement liées à la décomposition spectrale d'une certaine transformation fonctionnelle linéaire. J'ai étudié la même question à la même époque en transformant le système d'équations différentielles non linéaires en un système infini d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Des résultats ainsi obtenus j'ai déduit un critère pour déterminer si un système dynamique est quasi-ergodique ou non. Je démontre en même temps l'existence de certaines valeurs moyennes qui jouent un rôle important dans la mécanique statistique. Plus tard ce problème a été traité par MM. Birkhoff, J. v. Neumann, E. Hopf, B. Koopman, F. Riesz.

Applications à la Physique mathématique.

A cette catégorie appartiennent indirectement les applications indiquées dans le numéro précédent.

Il est bien connu que la théorie des matrices infinies et la théorie des équations intégrales sont des outils indispensables pour les théories physiques modernes, la mécanique quantique et la mécanique ondulatoire. M. Schrödinger a démontré que les problèmes mathématiques de ces deux théories sont au fond identiques. Le problème mathématique fondamental qui se présente dans la théorie de Schrödinger est le suivant: Etant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique $L(\varphi) = 0$, qui coïncide avec son adjointe et a ses coefficients réels; rechercher les valeurs de λ pour lesquelles

$$L(\varphi) + \lambda\,\varphi = 0 \tag{26}$$

admette une solution à carré intégrable dans tout l'espace des variables indépendantes; et, plus généralement, déterminer les développements spectraux qui correspondent à (26). Cette extension de la théorie classique des fonctions fondamentales attachées à une équation différentielle a été posée et traitée d'une manière générale, il y a une vingtaine d'années, par M. Weyl dans le cas des équations différentielles ordinaires. Il montre que deux cas peuvent se présenter: „Le Grenzpunktfall" et le „Grenzkreisfall". Le „Grenzpunktfall" est caractérisé par la non-existence de solutions à carré intégrable (non nulles) de (26) pour λ non réel. Ce cas est le seul où la fonction spectrale est déterminée d'une manière unique. Il est facile d'étendre la théorie de M. Weyl aux équations à plusieurs variables, soit directement, soit par l'intermédiaire de la théorie des équations intégrales hermitiennes.

Pour que la théorie de Schrödinger puisse réussir il faut que l'équation de Schrödinger

$$\left[H\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q},\, q\right)-\lambda\right]\varphi = 0$$

appartienne au „Grenzpunkttypus". Nous nous bornerons à remarquer que cela est certainement le cas pour l'équation

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{m_\nu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\nu^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_\nu^2}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z_\nu^2}\right)+\left(k\sum_{p,q}\frac{e_p e_q}{r_{pq}}+\lambda\right)\varphi = 0$$

qui correspond au problème des n-corps. On démontre que cette équation admette une fonction de Green formant un noyau borné au sens de M. Hilbert si λ a une valeur négative suffisamment grande. On trouve en même temps que le spectre ne peut pas s'étendre à l'infini du côté des λ négatifs.

La théorie des réseaux cristallins et la théorie cinétique des gaz sont d'autres chapitres importants de la Physique mathématique où la théorie des matrices infinies et la théorie des équations intégrales sont de la plus grande utilité.

La liste des disciplines mathématiques où l'on peut appliquer la théorie des équations intégrales n'est pas epuisée par celles dont nous venons de parler. Nous pouvons citer encore la Géometrie, le calcul des variations, le calcul des probabilités et même la théorie des nombres.

Les espaces riemanniens symétriques

Par Elie Cartan, Paris

Je me propose de consacrer cette Conférence à une théorie géométrique qui, d'intérêt assez restreint à son origine, s'est révélée en rapport étroit avec différentes branches des Mathématiques: la théorie des groupes de transformations, la théorie des fonctions et la théorie arithmétique des formes, l'Analysis situs.

I.

Les espaces riemanniens symétriques comprennent en particulier les espaces à courbure constante et les espaces hermitiens, dont ils constituent une généralisation. Ils peuvent être définis par deux propriétés caractéristiques, en apparence toutes différentes:

1° *La courbure riemannienne en un point quelconque A suivant un élément plan quelconque issu de A se conserve quand on transporte cet élément plan par parallélisme suivant un chemin quelconque.*

2° *La symétrie par rapport à un point quelconque A est une transformation isométrique:* la symétrie se définit en faisant correspondre à un point M, suffisamment voisin de A, le point M' obtenu en construisant l'arc de géodésique $M\,A$ et le prolongeant d'une longueur égale $A\,M'$.

L'équivalence des deux définitions tient à ce que le transport par parallélisme d'un vecteur d'un point A à un point infiniment voisin A' résulte des deux symétries successives par rapport à A et par rapport au milieu de l'arc de géodésique $A\,A'$. Si la symétrie est une transformation isométrique, le transport parallèle conserve la métrique et par suite la courbure; la réciproque se démontre facilement.

Un espace riemannien symétrique admet un groupe transitif de déplacements rigides. Si en effet A et B sont deux points quelconques, suffisamment voisins, le produit des symétries par rapport à A et au milieu de l'arc de géodésique $A\,B$ est une isométrie qui amène A en B; comme elle fait partie d'une famille continue d'isométries comprenant l'isométrie identique, c'est un déplacement proprement dit. Elle fait partie du plus grand groupe G de déplacements de l'espace. Nous supposerons que G est un groupe de Lie engendré par des transformations infinitésimales. L'espace est donc un *espace de Klein* de groupe G. Nous appellerons groupe d'isotropie en A et nous désignerons par g_A le sous-groupe de G qui laisse fixe le point A, ou plutôt la partie connexe de ce sous-groupe qui contient la transformation identique.

II

Les symétries σ_A par rapport aux différents points de l'espace jouissent des propriétés suivantes:

1⁰ *σ_A est une transformation involutive;*

2⁰ *σ_A admet le point A comme point invariant isolé;*

3⁰ *σ_A transforme entre elles les opérations de G;*

4⁰ *σ_A laisse invariante chacune des opérations de g_A;*

5⁰ *Les différentes symétries σ_A sont transformées entre elles par le groupe G.*

Dans l'énoncé précédent, la propriété de G d'être un groupe de déplacements n'intervient pas. Cela permet d'étendre la notion d'espace symétrique à des espaces de Klein non riemanniens. Il suffit, pour que l'espace soit symétrique, qu'on puisse associer à un seul point particulier O une transformation σ_0 jouissant des quatre premières propriétés énoncées; on prendra alors pour σ_A la transformations $\sigma_A = S\sigma_0 S^{-1}$ transformée de σ_0 par l'une quelconque S des transformations de G qui amènent O en A.

L'espace euclidien, l'espace non euclidien, l'espace affine sont des espaces symétriques, dont les deux premiers seuls sont riemanniens. Il peut du reste arriver qu'un espace de *Klein* soit symétrique de plusieurs manières.

On peut définir dans un espace symétrique, riemannien ou non, une famille de lignes, que nous appellerons *géodésiques*, sur chacune desquelles on peut introduire une métrique intrinsèque.

Partons de deux points A_0 et A_1; construisons le symétrique A_2 de A_0 par rapport à A_1, le symétrique A_3 de A_1 par rapport à A_2, et ainsi de suite; dans l'autre sens nous construisons de même le symétrique A_{-1} de A_1 par rapport à A_0, etc. Soit σ_i la symétrie par rapport à A_i, et T la transformation $\sigma_1 \sigma_0$, qui appartient à G. On démontre très facilement les relations

$$\sigma_i = T^i \sigma_0 = \sigma_0 T^{-i}, \quad \sigma_q = T^{q-p} \sigma_p = \sigma_p T^{p-q}, \quad \sigma_q \sigma_p = T^{q-p}.$$

La transformation T^p fait passer du point A_i au point A_{i+2p}; il est naturel d'appeler *distance* des deux points ordonnés A_p, A_q, à un facteur constant près, le nombre $q - p$, exposant de la puissance à laquelle il faut élever T pour obtenir $\sigma_q \sigma_p$.

Si les points A_0 et A_1 sont suffisamment rapprochés pour que T soit engendrée par une transformation infinitésimale de G, cette transformation engendrera un groupe continu à un paramètre T_t, t étant le paramètre *canonique* choisi de manière qu'on ait

$$T_t T_{t'} = T_{t+t'}$$

Les transformations $\sigma_t = T_t \sigma_0 = \sigma_0 T_{-t}$ seront alors des symétries par rapport à des points A_t formant une ligne continue, que nous appellerons une *géodésique* de l'espace, et qui sera la *géodésique de base* du groupe T_t. Nous donnerons à ces transformations T le nom de *transvections*. On voit facilement qu'une transvection dont la géodésique de base passe par A est caractérisée par la propriété d'être transformée en son inverse par σ_A. Par la transvection T_t, la géodésique de base glisse sur elle-même, chaque point avançant d'une longueur $k\,t$ (k = longueur fixe).

Les géodésiques d'un espace symétrique jouissent des deux propriétés suivantes:

1° *Par deux points suffisamment rapprochés il en passe une et une seule ;*

2° *Elles sont transformées entre elles par le groupe G de l'espace et par les différentes symétries σ_A.*

Un raisonnement géométrique extrêmement simple montre que ces deux propriétés sont caractéristiques, de sorte que si l'espace est riemannien et si les symétries sont isométriques, ces lignes ne sont autres que les géodésiques ordinaires.

Il est clair que les unités de longueur, qui restent arbitraires sur chaque géodésique, ne peuvent pas toujours être choisies de manière à obtenir dans tout l'espace une métrique invariante par G. Cela en particulier sera impossible si, comme dans l'espace affine, il existe une transformation de G permettant d'amener en coïncidence deux segments arbitraires d'une même géodésique.

Mais, avant d'arriver à caractériser, parmi les espaces symétriques, ceux qui sont riemanniens, voyons comment, le groupe G étant donné comme groupe abstrait, on peut construire les espaces symétriques correspondants.

La symétrie σ_A transforme entre elles les opérations de G; elle le fait évidemment de manière que S'_1 et S'_2 étant les transformées de S_1 et S_2, la transformée de $S_1\,S_2$ soit $S'_1\,S'_2$. Autrement dit σ_A définit une *automorphie involutive* de G.

Réciproquement soit σ_0 une automorphie involutive de G. Considérons la famille continue des automorphies involutives transformées de σ_0 par les différentes opérations de G[1]), et l'espace représentatif de ces automorphies. Il est facile de voir que c'est un espace transformé transitivement par G, et symétrique. Le groupe d'isotropie relatif au point O représentatif de l'automorphie σ_0 est formé des opérations de G invariantes par σ_0 (ou plutôt de la partie connexe contenant l'opération identique); nous l'appellerons le *sous-groupe caractéristique* de l'automorphie σ_0.

En définitive *la recherche des espaces symétriques de groupe donné G revient à celle des automorphies involutives de G.*

III

Revenons maintenant aux espaces symétriques riemanniens. Supposons, *ce qui est une hypothèse essentielle pour la suite*, que le ds^2 de l'espace soit défini. Le groupe

[1]) Si σ_0 fait correspondre à S l'opération $\bar{S}$, la transformée de σ_0 par S_0 fera correspondre à S l'opération $S_0\,\bar{S}_0^{-1}\,\bar{S}\,\bar{S}_0\,S_0^{-1}$.

d'isotropie g_A appartient alors à une catégorie de groupes dont M. *H. Weyl* a montré l'importance dans la théorie des représentations linéaires des groupes; c'est un groupe *clos*, ce qui signifie que tout ensemble infini d'opérations de g_A admet au moins un élément d'accumulation appartenant à g_A. Au point de vue de la structure, un groupe clos est, au moins infinitésimalement, le produit direct de groupes simples et, éventuellement, de groupes à un paramètre, tous échangeables entre eux.

Réciproquement soit G un groupe abstrait donné, et σ_0 une automorphie involutive dont le sous-groupe caractéristique g_0 soit clos. On peut définir dans l'espace symétrique correspondant une métrique riemannienne invariante par G. En effet soit O le point représentatif de σ_0. Le sous-groupe g_0, considéré comme opérant sur les vecteurs d'origine O, est un groupe linéaire clos; d'après un théorème de M. *H. Weyl*, il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qui donnera par convention le carré de la longueur d'un vecteur, ou encore le carré de la distance du point O à tout point infiniment voisin. La métrique ainsi définie en O s'étend, grâce aux opérations de G, à l'espace tout entier. On démontre facilement que la métrique riemannienne ainsi obtenue est invariante par G et aussi par la symétrie σ_0; elle concorde donc, sur chaque géodésique, avec celle que le procédé des symétries successives avait permis d'y définir. Il peut arriver que le groupe linéaire clos g_0 laisse invariantes plusieurs formes quadratiques définies; les géodésiques seront donc les mêmes pour ces différentes métriques, et sur chaque géodésique le rapport des longueurs de deux segments donnés sera aussi le même.

En définitive, la détermination des espaces riemanniens symétriques est ramenée à celle des groupes admettant une automorphie involutive à sous-groupe caractéristique clos.

On peut simplifier le problème. Si en effet le groupe linéaire d'isotropie laisse invariant un élément plan, on démontre que l'espace est le produit topologique de deux espaces riemanniens symétriques: il est *réductible*. Il suffit de déterminer les espaces *irréductibles*.

IV

Une méthode consiste à déterminer directement tous les groupes d'isotropie possibles par les procédés de la géométrie riemannienne. Les calculs sont fort longs. Signalons cependant le résultat fondamental suivant:

A un groupe d'isotropie donné correspondent, abstraction faite du choix arbitraire de l'unité de longueur, deux espaces riemanniens symétriques irréductibles, l'un ouvert à courbure riemannienne partout négative ou nulle, l'autre clos à courbure riemannienne partout positive ou nulle.

Une méthode beaucoup plus rapide consiste à déterminer tous les groupes de déplacements possibles. Une analyse relativement simple fondée sur la théorie de la structure des groupes montre que si l'on fait abstraction des espaces euclidiens ou localement euclidiens, qui sont du reste réductibles pour $n \geq 2$ dimensions, le groupe G est *simple* ou se décompose en deux groupes simples clos isomorphes entre eux et échangeables entre eux. De plus le groupe d'isotropie est un sous-groupe clos maximum de G.

Dans le dernier cas indiqué *l'espace est l'espace représentatif des opérations d'un groupe simple clos.* Si l'on désigne les opérations du groupe par les symboles S_a, S_ξ, . ., e déplacement le plus général est donné par la formule

$$S_{\xi'} = S_a\, S_\xi\, S_b^{-1};$$

la symétrie par rapport au point S_a fait passer de S_ξ à $S_a\, S_\xi^{-1}\, S_a$. M. *J. A. Schouten* et moi avons étudié cette métrique.

Avant d'examiner le cas où le groupe des déplacements est simple, rappelons quelques résultats de la théorie des groupes simples. Killing et moi-même avons déterminé toutes les structures de groupes simples *à paramètres complexes*. Un tel groupe, d'ordre r, doit, à notre point de vue, être considéré comme étant à $2r$ paramètres réels. Mais il existe des *formes réelles* de ce groupe, c'est-à-dire des groupes à r paramètres réels tels que l'on passe de l'un d'eux au groupe total en regardant ces paramètres comme complexes, ce qui a un sens, à cause de l'analyticité de la loi de composition du groupe. Parmi ces formes réelles, il y en a toujours une qui est close, d'autres qui sont ouvertes. Je les ai déterminées en 1913 par une méthode directe conduisant malheureusement à de longs calculs, que la théorie des espaces symétriques permet d'éviter dans une large mesure. Nous désignerons par Γ le groupe simple à paramètres complexes, par G_u une forme réelle close, par G une forme réelle ouverte. Le groupe Γ est lui-même ouvert.

Construisons d'abord un espace riemannien symétrique de groupe Γ; nous montrerons ensuite que cet espace est unique. Choisissons pour cela les paramètres de Γ de manière que les transformations à paramètres tous réels engendrent le groupe clos G_u. Ce groupe G_u est évidemment le sous-groupe caractéristique de l'automorphie involutive σ_u de Γ qui consiste à remplacer les paramètres de Γ par leurs complexes conjugués. L'espace symétrique correspondant, que nous appellerons E_Γ, est le lieu des différents transformés de G_u par les transformations de Γ; il est à r dimensions. On montre très simplement que par deux points de cet espace il passe une géodésique et une seule, et que les géodésiques issues d'un point remplissent tout l'espace, qui est ainsi homéomorphe à l'espace euclidien.

Montrons maintenent qu'il n'y a pas d'autre espace riemannien symétrique de groupe Γ. Il nous suffira pour cela de démontrer que tout sous-groupe clos g de Γ est soit G_u, soit le transformé de G_u par une opération de Γ, soit un sous-groupe des précédents. En effet le groupe g est un groupe de déplacements de l'espace E_Γ; appliquons ses différentes opérations à un point donné de l'espace; le lieu des transformés sera une variété *fermée* V invariante par g. Or, j'ai démontré que dans tout espace riemannien simplement connexe à courbure riemannienne partout négative ou nulle il existe un point et un seul qui réalise le minimum de la somme des carrés des distances à un ensemble de points donnés. La variété V, invariante par g, a donc une espèce de *centre*, invariant lui aussi par g; ce centre représente un des groupes homologues de G_u; le groupe g est donc ce groupe lui-même ou un de ses sous-groupes. Nous avons ainsi, par des considérations géométriques faites dans l'espace E_Γ, démontré:

1° que *les formes réelles closes de Γ forment une seule famille continue;*

2° que *tout espace riemannien, autre que E_Γ, admettant Γ pour groupe des déplacements, a un nombre de dimensions supérieur à celui de E_Γ et n'est pas symétrique.*

On peut donner à l'espace E_Γ le nom d'*espace riemannien fondamental de la géométrie de groupe Γ:* c'est ainsi que l'espace de *Lobatchefsky* est l'espace riemannien fondamental de la géométrie projective de la droite complexe.

V.

Avant de passer aux espaces riemanniens symétriques dont le groupe des déplacements est un groupe simple à paramètres réels, occupons-nous de la détermination des formes réelles ouvertes de Γ. Si G est une telle forme, on peut, comme on l'a fait tout à l'heure pour G, lui associer une automorphie involutive σ de Γ dont G soit le sous-groupe caractéristique. *Il existe au moins une forme réelle close invariante par σ.* En effet, dans l'espace E_Γ, σ définit une isométrie involutive; si A et A' sont deux points qui se correspondent dans cette isométrie, σ laisse invariante la géodésique AA'; faisant passer de A à A' et de A' à A, elle laisse invariant le milieu C de AA', et par suite la forme réelle close G_u que ce point C représente. Ajoutons, pour ne pas interrompre notre raisonnement géométrique, que si σ laisse invariants deux points C et C' de E_Γ, il laisse invariants tous les points de la géodésique qui les joint, de sorte que *le lieu des points invariants par σ est une variété connexe totalement géodésique V.*

Revenons au groupe clos G_u invariant par σ; l'automorphie involutive σ de Γ *induit* sur G_u une automorphie involutive dont la connaissance, comme on le voit facilement, entraîne inversement celle de σ. Par suite *la détermination des formes réelles ouvertes de Γ revient à la recherche des automorphies involutives d'une forme réelle close particulière G_u.* On est ainsi conduit à une méthode très simple, la structure d'un groupe clos, et par suite la recherche de ses automorphies involutives, présentant beaucoup moins de complications que pour un groupe ouvert.

Revenons maintenant dans notre espace E_Γ, et considérons la variété totalement géodésique V lieu des points invariants par σ. C'est évidemment un espace riemannien symétrique ouvert, homéomorphe à l'espace euclidien, et le groupe G le transforme isométriquement: c'est donc un espace riemannien symétrique admettant G pour groupe des déplacements. Un raisonnement identique à celui qui a été fait pour E_Γ montre que c'est le seul. Nous arrivons donc au théorème général suivant:

Il existe une forme riemannienne symétrique et une seule de la géométrie basée sur un groupe simple ouvert.

On voit de plus que l'*espace riemannien fondamental du groupe ouvert G est réalisable comme variété totalement géodésique de l'espace riemannien fondamental du groupe à paramètres complexes Γ.*

Enfin l'espace E_Γ fournit aussi une interprétation géométrique des espaces riemanniens symétriques admettant le groupe clos G_u comme groupe des déplacements. Ici il y en a plusieurs, autant que de formes réelles ouvertes de Γ. Si G est l'une de ces formes, V la variété totalement géodésique qui la représente, considérons toutes les variétés, transformées de V par Γ, qui passent par un même point fixe O. Le groupe G_u des rotations de E_Γ autour de O transforme entre elles ces différentes variétés, qui peuvent être regardées comme les éléments ou points d'un espace riemannien symétrique clos de groupe G_u. De sorte qu'en dernière analyse *la détermination des espaces symétriques irréductibles revient à celle des groupes simples et de leurs formes réelles.*

Dans mes „Leçons sur la géométrie projective complexe", j'ai développé, dans le cas où Γ est le groupe projectif complexe à trois dimensions, tous les aspects de la théorie que je viens d'esquisser; elle conduit à des aperçus géométriques nouveaux, sur lesquels je n'ai pas le temps d'insister.

VI.

Je termine cette Conférence en indiquant rapidement quelques applications.

Dans la théorie des fonctions automorphes et dans la théorie arithmétique des formes, interviennent des groupes proprement discontinus (au sens abstrait du mot) qui sont presque tous des sous-groupes de groupes simples *ouverts* G. Un tel groupe, tout en étant proprement discontinu *in abstracto*, peut opérer d'une manière improprement discontinue sur l'espace dans lequel on le considère; mais il est certain qu'il opérera d'une manière proprement discontinue sur l'espace riemannien fondamental du groupe ouvert G dont le groupe considéré est un sous-groupe. *L'existence de cet espace riemannien domine donc les théories auxquelles je fais allusion*, et ce n'est pas simplement par un hasard heureux que Poincaré a pu se servir du plan non euclidien pour édifier la théorie des fonctions fuchsiennes. On ne sera pas étonné d'après cela d'apprendre que l'espace riemannien fondamental de la géométrie projective réelle est l'espace des formes quadratiques définies positives, et que celui de la géométrie projective complexe est l'espace des formes d'Hermite définies positives. Je dois ajouter que dans son „Introduzione alla Teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe", M. Fubini avait déjà indiqué plusieurs des métriques riemanniennes fournies par les espaces symétriques.

VII.

C'est surtout l'Analysis situs qui est intéressé par les espaces symétriques clos, car ils fournissent une classe importante de variétés dont on peut pousser assez loin l'étude topologique.

En ce qui concerne leurs géodésiques, il en passe au moins une par deux points donnés. Pour avoir des résultats plus précis, il faut introduire le *rang* λ de l'espace: c'est le nombre maximum des transvections infinitésimales échangeables entre elles dont les géodésiques de base passent par un point donné; ces géodésiques forment une variété fermée à courbure nulle, analogue topologiquement à un tore généralisé. Une géodésique générique est contenue dans une de ces variétés et une seule, et elle passe infiniment près de tous les points de cette variété. Si $\lambda > 1$, par deux points il passe une infinité de géodésiques; si $\lambda = 1$, il en passe une et en général une seule, qui est fermée.

D'un autre point de vue, on peut obtenir les nombres de Betti de l'espace par une méthode purement algébrique ne faisant intervenir que les propriétés infinitésimales de l'espace. Cette méthode repose sur des théorèmes relatifs aux intégrales de différentielle exacte d'une variété close, dont la démonstration est due à M. G. de Rham. Elle revient à la détermination de certains invariants rationnels entiers du groupe linéaire d'isotropie; chacun d'eux donne naissance à une intégrale multiple, qui est automatiquement une intégrale de différentielle exacte; le nombre des intégrales indépendantes de degré donné est égal au nombre de Betti correspondant de l'espace.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le groupe d'isotropie contient une transformation infinitésimale échangeable avec toutes les autres. L'espace peut alors être regardé comme *analytique complexe*. On obtient ainsi

l'espace projectif complexe;

l'espace des variétés planes à p dimensions de l'espace projectif complexe à $p + q$ dimensions;

la quadrique complexe non dégénérée;

l'espace des variétés planes à p dimensions génératrices de la quadrique complexe à $2\,p$ dimensions;

l'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace à $2\,p + 1$ dimensions;

enfin deux espaces représentables par deux variétés algébriques, l'une, à 16 dimensions, du 78^e degré, plongée dans l'espace à 26 dimensions; l'autre, à 27 dimensions, du 13110^e degré, plongée dans l'espace à 55 dimensions.

Dans tous ces espaces les nombres de *Betti* d'ordre impair sont nuls, ceux d'ordre pair sont positifs et égaux au nombre de certaines représentations linéaires distinctes d'un certain groupe lié au groupe d'isotropie. Enfin il existe pour les homologies sans division une base formée de variétés algébriques. On peut ainsi retrouver, mais avec une plus grande portée, pour les deux premiers espaces indiqués, des résultats qui ont fait l'objet de nombreux travaux remontant à *Schubert*.

En ce qui concerne les autres espaces clos, ceux dont le groupe d'isotropie est simple ou semi-simple, il y aurait lieu d'appliquer la méthode indiquée. En particulier pour les espaces représentatifs des groupes simples clos, on sait que les deux premiers nombres de *Betti* sont nuls, mais que le troisième ne l'est pas; un résultat intéressant, mais isolé, est que la somme des nombres de *Betti* de l'espace est égale à 2^l, où l désigne le rang du groupe. Il y aurait intérêt à étudier de plus près cette question, d'autant plus importante que la variété d'un groupe quelconque, au moins sous sa forme simplement connexe (cycles à une dimension réductibles à un point), est le produit topologique d'un espace euclidien et d'un ou plusieurs espaces de groupes simples clos.

Enfin, dans un ordre d'idées un peu différent, tout espace riemannien symétrique clos admet une suite infinie de réalisations par des variétés sans singularité d'un espace euclidien, les transformations du groupe G de l'espace riemannien se traduisant, sur ces variétés, par des rotations autour d'un point fixe de tout l'espace euclidien ambiant (*exemple* la sphère). Chaque représentation est associée à une *suite de fonctions fondamentales* de l'espace: c'est une suite d'un nombre fini de fonctions continues subissant une substitution linéaire par toute opération du groupe de l'espace. L'ensemble des fonctions de toutes ces suites, qu'on peut obtenir par voie algébrique, constitue un système orthogonal complet de fonctions, en ce sens que toute fonction continue qui leur est orthogonale est identiquement nulle. La continuité des fonctions d'une suite fondamentale n'est même pas nécessaire à supposer; il suffit qu'elles soient bornées, leur continuité en découle: c'est là un théorème extrêmement remarquable dont la démonstration fait en partie appel à la théorie géométrique des espaces symétriques.

J'espère vous avoir montré suffisamment comment, dans la théorie des espaces symétriques, les différentes branches des Mathématiques que j'énumérais au début de cette Conférence se prêtent un mutuel appui, s'éclairant l'une l'autre; c'est à ce titre qu'elle m'a paru ne pas être indigne d'être exposée devant vous.

Bibliographie

E. Cartan and *J. A. Schouten*, On the Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism (Proc. Amsterdam, 29, 1926, p. 803—815).

E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations (J. Math. pures et appl., 6, 1927, p. 1—119).

id., Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann (Bull. Soc. Math., 54, 1926, p. 214—264; 55, 1927, p. 114—134).

id., La géométrie des groupes simples (Annali di Mat., 4, 1927, p. 209-256; 5, 1928, p. 9—17).

id., Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple (Ann. Ec. Norm., 44, 1927, p. 345—467).

id., Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne (J. Math. pures et appl., 8, 1929, p. 1—33).

id., La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (Mém. Sc. Math., XLII, 1930).

id., Leçons sur la géométrie projective complexe (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

id., Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos (Rend. Circ. Mat. Palermo, 53, 1929, p. 217—252).

id., Sur les représentations linéaires des groupes clos (Comm. Math. helvet., 2, 1930, p. 269—283).

id., Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces (Ann. Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 181—225).

Ehresmann, Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé (C. R., 194, 1932, p. 2004—2006).

Operationsbereiche von Funktionen

Von Ludwig Bieberbach, Berlin

Die Kongressleitung hat mich zu einem Vortrag aus meinen Arbeitsgebieten aufgefordert. Da muss ich von vorneherein betonen, dass ich wesentlich mehr von Ergebnissen anderer als von eigenen Resultaten sprechen werde. Es gibt aber verschiedene Gründe, die mir mein Thema für diese Gelegenheit als geeignet erscheinen lassen. Denn einmal werde ich neben den fertigen Ergebnissen zahlreiche ungelöste Probleme herauszustellen haben. Ferner greifen die Fragen, die wir zu berühren haben, in soviele verschiedene mathematische Gebiete ein, dass schon deshalb dieser Vortrag einer allgemeinen Sitzung angehören muss. Und endlich sind an den fertigen Ergebnissen Mathematiker so vieler Nationen beteiligt, dass fast jeder von uns diesen Vortrag halten könnte, ohne befürchten zu müssen, dass die eigene Nation dabei nicht zu Worte kommt.

Doch nun zur Sache.

Wir beginnen mit folgender Frage: Gegeben eine Menge von Funktionen – Bereich B, wie wir sagen wollen – und eine Menge O von Operationen. Man wende die Operationen von O auf B an. Was lässt sich über den entstehenden, hinsichtlich O geschlossenen Operationsbereich $B(O)$ aussagen? O soll dabei stets eine gewisse gleich zu erläuternde gruppenartige Eigenschaft besitzen.

Z. B.: B bestehe aus der einen Funktion x. O bestehe aus den Operationen, die sich erzeugen lassen aus

1. rationalen Funktionen von beliebig vielen Variablen;
2. p-ten Wurzeln, $p = 2, 3 \ldots\ldots$

O ist somit eine Menge von Operationen, die sich von einer Gruppe ähnlich wie die Brandtschen Gruppoide dadurch unterscheidet, dass nicht jede Operation mit jeder anderen zusammengesetzt werden kann. Zum Unterschied von den Gruppoiden Brandts können aber mehrere Operationen eine neue Operation als Produkt haben, ohne dass die Faktoren paarweise zusammensetzbar sind. Die Menge O ist in dem Sinne abgeschlossen, dass sie alle möglichen Zusammensetzungen ihrer Elemente enthält. Die Operationen einer solchen Menge O, werden dann auf die Funktionen von B angewandt. In unserem Beispiel erhält man so als Bereich $B(O)$ die Menge der durch Wurzelzeichen darstellbaren algebraischen Funktionen einer Variablen. Es liegt im Gefolge[1]) des Abelschen Satzes über die Gleichung fünften Grades, dass

[1]) Der Abelsche Satz enthält unmittelbar nur eine entsprechende Aussage über algebraische Funktionen von 4 oder 5 Variablen.

der Bereich $\mathfrak{A}$ aller algebraischen Funktionen einer Variablen umfassender ist:

$$\mathfrak{A} \supset B\,(\text{rat}, \sqrt[p]{})$$

Und dies ist eine Aussage über $B\,(O)$.

Erst neuerdings hat F. Ritt einen Überblick über alle durch Wurzelzeichen darstellbaren algebraischen Funktionen einer Variablen zu gewinnen gesucht. Die vom Geschlecht Null hat er alle aufgestellt. Bei höherem Geschlecht und bei Primzahlordnung hat er ein Verfahren angegeben, das die Aufstellung aller ermöglicht. Z. B. ergibt sich, dass bei gegebenem Geschlecht dann eine obere Schranke für die Ordnung besteht.

An die Abelsche Entdeckung haben sich zwei Forschungsrichtungen angeschlossen, die Galoische Theorie und die weniger bekannte Theorie der elementaren Funktionen Liouvilles[2]).

Liouville lehnt sich in Fragestellung und Methode bewusst an Abel an. Z. B. B sei wieder von x allein gebildet. O werde erzeugt durch

1. algebraische Funktionen von beliebig vielen Variablen: a;
2. e-Funktion;
3. Logarithmus.

$B\,(a, e, \log)$ heisst Bereich der elementaren Funktionen.

Ganz im Sinne des Abelschen Satzes liegt es, wenn Liouville feststellt, dass die Hinzunahme der Operation J, d. i. „Integral von" den Bereich der elementaren Funktionen erweitert, indem z. B $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ nicht elementar ist.

Der Nachweis beruht auf einem allgemeinen Satz, der im einfachsten Fall so lautet:

$P\,(x, e^x, \log x)$ sei eine algebraische Funktion von x, e^x, $\log x$. Dafür dass

$$\int P\,(x, e^x, \log x)\, d\,x$$

elementar ist, ist notwendig (und hinreichend), dass es eine Anzahl algebraischer Funktionen $U_i\,(x, e^x, \log x)$ und eine Anzahl von Konstanten a_i gibt, derart, dass

$$\int P\,(x, e^x, \log x)\, dx = U_0 + \varepsilon\, a_i \log U_i$$

ist.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem allgemeinen Prinzip: Man teile die elementaren Funktionen nach ihrer Höhe ein: Höhe O: algebraische Funktionen; Höhe 1: $\text{alg}\,(x, e^{\text{alg}}, \log \text{alg})$, soweit sie nicht Funktionen der Höhe Null gleich sind[3]):

[2]) Soweit, ich sehe ist Liouville fast der einzige unter den grossen französischen Mathematikern, der bisher weder einer Quart- noch einer Oktavausgabe seiner Werke gewürdigt wurde.

[3]) Dass es Funktionen jeder Höhe gibt, hat Liouville gezeigt.

Höhe 2: alg $(x, e^{h_0}, \log h_0, h_1, e^{h_1}, \log h_1)$, soweit sie nicht Funktionen der Höhe 0 oder 1 gleich sind usw.

Hat man dann eine Funktion h_n der Höhe n so geschrieben, dass zwischen den darin vorkommenden „Monomen" $\exp(h_{n-1})$, $\log(h_{n-1})$ keine algebraische Relation mehr besteht und findet man im Laufe der Betrachtung doch solch eine Relation, so ist dieselbe identisch erfüllt, auch dann, wenn man die betreffenden Monome durch unabhängige Variable ersetzt.

Die Operation J hebt sich hier deutlich von der Operation D – Ableitung von – ab. Denn diese letztere erweitert den Bereich der elementaren Funktionen nicht.

Es liegt nahe, die Operation U – Bildung der Umkehrungsfunktion – zu betrachten. Die Methoden Liouvilles lehren, dass z. B. die Umkehrungsfunktion von $y = x + e^x$ nicht elementar ist:

$$B(x, \text{alg}, e, \log, U) \supset B(x, \text{alg}, e, \log).$$

Ja es gilt sogar:

$$B(x, \text{alg}, e, \log, U) \supset B(x, \text{alg}, e, \log, J).$$

Dies hängt damit zusammen, dass die Umkehrungsfunktion von $y = x + e^x$ einer elementaren Differentialgleichung

$$x' = \frac{1}{1 + e^x}$$

genügt, die durch Quadraturen nicht lösbar ist.

Bezeichnet man mit A die Operation der Auflösung beliebiger algebraischer Differentialgleichungen, so ist nach Liouville sogar

$$B(x, A) \supset B(x, \text{alg}, e, J).$$

Insbesondere ist die Riccatische Differentialgleichung

$$y' + y^2 = P(x)$$

bei algebraischem $P(x)$ nur dann durch Quadraturen lösbar, wenn sie ein algebraisches Integral besitzt, was z. B. bei

$$y' + y^2 = x^2$$

nicht der Fall ist.

Wegen der Methoden gilt das oben schon Gesagte, mit dem Zusatz, dass es Ritt gelungen ist, durch Heranziehung funktionentheoretischer Erwägungen den Beweisgang z. B. für den Satz über die Riccatische Differentialgleichung erheblich abzukürzen.

Ritt hat auch gelegentlich auf den leicht ersichtlichen Umstand aufmerksam gemacht, dass die elementaren Funktionen auf fast allen Wegen fortsetzbar sind, d. h. dass es in beliebiger Nähe eines jeden Weges andere gibt, auf denen die Fortsetzung möglich ist. Daher kommen bei elementaren Funktionen natürliche Grenzen nicht vor und somit leuchtet ein, dass z. B. die automorphe elliptische Modulfunktion nicht elementar ist.

Fragt man aber z. B., ob bei den Umkehrungsfunktionen der elementaren Funktionen oder allgemeiner bei dem Bereich

$$B\,(x, \text{alg}, e, U)$$

natürliche Grenzen vorkommen, so steht man bereits vor einer ungelösten Frage, die eng mit einer genaueren Untersuchung der Singularitäten elementarer Funktionen zusammenhängt.

Man kann den Begriff der elementaren Funktion dadurch einschränken, dass man nur algebraische Funktionen einer Variablen in der Menge O zulässt. Dann ist evident, dass dieser Bereich durch Hinzunahme der Operation U nicht erweitert wird. Ritt hat darüber hinaus gezeigt, dass er identisch ist mit der Menge aller elementaren Funktionen mit elementarer Umkehrung.

Statt der Operation U kann man die allgemeinere Operation $\overline{U}$, d. i. Auflösung einer elementaren Gleichung heranziehen. So hat Ritt gezeigt, dass das Integral einer elementaren Funktion nur dann einer elementaren Gleichung genügen kann, wenn es einer elementaren Funktion gleich ist. Das bedeutet also, dass der Integrationsprozess in einmaliger Anwendung für die Auflösung elementarer Gleichungen mit nicht elementarer Lösung, also auch für die Bildung der nichtelementaren Umkehrfunktion wertlos ist. Offen ist die Frage, ob vielleicht sogar

$$B\,(x, a, e, \overline{U})\ .\ B\,(x, a, e, J) = B\,(x, a, e, \log)$$

ist. Dagegen gilt, wie leicht zu sehen

$$B\,(x, \text{alg}, e, A) \supset B\,(x, \text{alg}, e, U),$$

so dass man also die Umkehrung elementarer Funktionen stets auf die Lösung algebraischer Differentialgleichungen reduzieren kann. Auch lässt sich zeigen, dass

$$B\,(x, \text{alg}, e, A) \supset B\,(x, \text{alg}, e\,\overline{U}).$$

Interesse verdient, aber in diesem Zusammenhang der Rittsche Satz, dass jede Lösung einer elementaren Differentialgleichung

$$w'' = f\,(z)\ .\ w,$$

die einer elementaren Gleichung $F\,(w, z) = 0$ genügt, selbst elementar ist.

Die Operation „eindeutige Funktion von" wird in diesem Vortrag noch mehrfach eine Rolle spielen. Damit hängt die Frage nach den im grossen eindeutigen elementaren Funktionen zusammen. Es ist klar, dass

$$B\,(x, \text{rat}, e)$$

aus lauter eindeutigen elementaren Funktionen besteht. Sollten darin alle eindeutigen elementaren Funktionen enthalten sein? Oder wie kann man diese charakterisieren? Die Frage scheint ungelöst.

Man hat sich die Frage vorgelegt, ob der Bereich

$$B\,(x, A)$$

alle analytischen Funktionen einer Variablen umfasst, d. h. ob es analytische Funktionen einer Variablen gibt, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.

Der Höldersche Satz über die Gammafunktion liefert ein Beispiel einer solchen analytischen Funktion. Ostrowski hat dafür einen Beweis gegeben, der fast noch einfacher ist, als der Rittsche blosse Existenzbeweis für solche hochtranszendente Funktionen.

Schottky hat 1922 eine andere Klasse von Funktionen angegeben, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Sucht man nämlich einen von Kegelschnittbogen begrenzten polygonalen Bereich konform auf eine Kreisscheibe abzubilden, so kann die Abbildungsfunktion nicht immer einer algebraischen Differentialgleichung genügen. Schottkys Beispiel betrifft ein Sechseck, abwechselnd begrenzt von Geraden und von Hyperbelbogen, wobei aber das Dreieck der Geraden und das Dreieck der Hyperbelbogen noch gewissen Irrationalitätsbedingungen genügt. Die Frage, ob es überhaupt vorkommen kann, dass solche Abbildungsfunktionen algebraischen Differentialgleichungen genügen, scheint mir noch offen, trotz der Rechnungen Lindemanns, die das Gegenteil beweisen sollen; denn diese werden dem Schottkyschen Beispiel nicht gerecht. Zwar hat Lindemann die Frage, ob seine Theorie überhaupt zu einer algebraischen Differentialgleichung für die Abbildungsfunktion führt, nicht beantwortet. Es scheint aber nach den Lindemannschen Rechnungen so, als ob die Abbildungsfunktionen einer Differentialgleichung genügte, deren linke Seite rational abhängt von den Ableitungen der gesuchten Funktion und einer Hilfsfunktion, die selber einer algebraischen Differentialgleichung genügt. Das führt zu der Frage, ob alle Funktionen aus $B\,(x, \mathrm{alg}, A)$ selber algebraischen Differentialgleichungen genügen.

Dass dies der Fall ist, hat aber Ostrowski bereits 1920 bewiesen. Der Bereich $B\,(x, \mathrm{alg}, A)$ hat demnach die bemerkenswerte Eigenschaft, dass er nur eine Transzendenzstufe hat. Die Lösungen von Differentialgleichungen, die algebraisch von der unbekannten Funktion, der unabhängigen Variablen, und von Lösungen anderer algebraischen Differentialgleichungen abhängen, sind selber Lösungen von algebraischen Differentialgleichungen. Dies ist nicht schwer mit körpertheoretischen Mitteln zu beweisen, aber es ist eine recht bemerkenswerte Tatsache. Somit klafft ein Widerspruch zwischen den Überlegungen Schottkys und den Rechnungen Lindemanns. —

Hilbert hat darauf hingewiesen, dass die Riemannsche Zetafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. Ostrowski hat eine ganze Klasse von Dirichletschen Reihen mit dieser Eigenschaft angegeben, so z. B. die Reihen

$$\Sigma \frac{a_n}{n^s},$$

bei denen alle $a_n \neq o$ sind. Weiter hat Ostrowski gezeigt, dass man aus jeder Potenzreihe durch Vorzeichenwechsel passender Glieder, andere Reihen machen kann, die keiner algebraischen Differentialgleichung genügen. Ferner ist bekannt, dass Potenzreihen mit zu grossen Lücken keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können usw.

Wir erwähnten oben schon, dass Liouville die Frage erörterte, wann

$$y' + y^2 = P(x)$$

mit algebraischem $P(x)$ ein algebraisches Integral besitzt. Er hat sie für

$$y' + y^2 = x^m$$

restlos erledigt. An diesen Fragenkreis haben sich, mit Liouvilles Schülern Briot-Bouquet beginnend bis Fuchs, Schwarz, Poincaré, Painlevé, Malmquist u. a. mancherlei Arbeiten über algebraische und über eindeutige Lösungen angeschlossen. Sie stellen aber die Frage meist nach dem allgemeinen Integral und nicht nach einzelnen algebraischen oder eindeutigen Integralen und bleiben oft auch bei einer gewissen Hilfsfrage stehen, nämlich der nach Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten und festen Unbestimmtheitsstellen der Lösungen, bei Fragen also, die ausserhalb unseres Themas liegen.

Bisher haben wir immer B und O als gegeben angesehen und nach Eigenschaften von $B(O)$ gefragt. Man kann aber auch von O und $B(O)$, d. h. einem in bezug auf die Operationen O geschlossenen Bereiche ausgehen und nach B fragen. Wir wollen B eine Basis von $B(O)$ nennen, d. h. also einen möglichst kleinen Teilbereich von $B(O)$ suchen, aus dem $B(O)$ vermittelst O erzeugt werden kann, sozusagen also einen Fundamentalbereich der Operationenmenge O.

Bekannt und oft, wenn auch nicht abschliessend erörtert sind solche Fragen in der Theorie der algebraischen und der automorphen Funktionen, sowie der Uniformisierung. Z. B.: Man betrachtet die Gesamtheit der auf einer gegebenen Riemannschen Fläche im grossen eindeutigen Funktionen. Dieser Bereich $B(O)$ ist geschlossen hinsichtlich der Operationen „im grossen eindeutige analytische Funktion von mehreren Variablen“. Es lässt sich zeigen, dass er eine Basis von zwei

Funktionen besitzt. Z. B. sind ja bekanntlich die auf einer algebraischen Riemannschen Fläche eindeutigen analytischen Funktionen sogar rationale Funktionen zweier passender derselben. Ein anderes Beispiel: Man betrachte die auf einer gegebenen Riemannschen Fläche im kleinen eindeutigen analytischen Funktionen. Auch dieser Bereich $B(O)$ ist geschlossen hinsichtlich der Operation „im grossen eindeutige analytische Funktion von mehreren Variablen". Die Lehre von der Uniformisierung zeigt, dass dieser $B(O)$ eine Basis von einer Funktion besitzt[4]).

Diese, auch für das ungelöste Problem der Uniformisierung bei Funktionen mehrerer Variablen brauchbare Formulierung rückt dasselbe neben den Menger-Nöbelingschen Einbettungssatz. Dieser besagt, dass jeder n-dimensionale Raum mit einer Teilmenge des $2n + 1$-dimensionalen kartesischen Raumes homöomorph ist. Man kann ihn aber durch folgende Formulierung in Parallele zur Uniformisierungstheorie stellen. Man betrachte alle in einem n-dimensionalen Raum im grossen eindeutigen und stetigen Funktionen. Dieser Bereich $B(O)$ ist geschlossen gegenüber den Operationen „im grossen eindeutige stetige Funktionen von mehreren Variablen". Der Menger-Nöbelingsche Satz sagt, dass er eine Basis von höchstens $2n + 1$ Funktionen besitzt.

Z. B. man betrachte eine geschlossene Fläche des dreidimensionalen Raumes. Die drei Raumkoordinaten liefern eine Basis. Und offenbar kann es keine Basis von weniger als drei Funktionen geben, da man eine geschlossene Fläche nie umkehrbar eindeutig und stetig auf einen Teilbereich der kartesischen Ebene abbilden kann.

Der Mengersche Satz würde eine Basis von fünf Funktionen liefern, wenn man auch sagen kann, man brauche ihn bei diesem Beispiel nicht erst anzuwenden. Jedenfalls liefert er nicht immer die Minimalordnung der Basis und es ist noch nicht bewiesen, dass die Zahl $2n + 1$ die wahre Schranke ist.

Ein anderes Beispiel: Die projektive Ebene. Der Menger-Nöbelingsche Satz lehrt, dass es eine Basis von 5 Funktionen geben muss. In der Tat: Man bilde die projektive Ebene ab auf die Paare der diametralen Punkte der Einheitskugel des x, y, z-Raumes. $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ sind 6 Funktionen, die eine Basis bilden. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genügen aber 5 davon. Gibt es eine Basis von weniger als 5 Funktionen? Da jede geschlossene doppelpunktfreie Fläche des R_3 orientierbar ist, so ist die Ordnung der Basis grösser als drei. Aber vier ist eine mögliche Basisordnung. Denn es gibt im R_4 geschlossene doppelpunktfreie nicht orientierbare Flächen. Ein von Hilbert in seiner Arbeit über die Gleichung neunten Grades gegebenes Beispiel ist dieses:

$$x_1 = yz,\ x_2 = zx,\ x_3 = xy,\ x_4 = x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

[4]) Ob man stets eine jede andere Funktion mit Hilfe von im grossen eindeutigen Funktionen bekommen kann, ist eine offene Frage. Gezeigt wird in der Theorie nur, dass diese im grossen eindeutigen Funktionen eindeutig sind im Wertevorrat der einzusetzenden Funktionen. So muss man also auch den Begriff „im grossen eindeutig" bei der Definition von O verstehen.

sondere Rolle spielt. Zunächst das Hilbertsche Schachtelungsproblem. Man kann jede Funktion von drei Variablen durch Zusammensetzen von Funktionen von zwei Variablen herstellen. Hier besteht also B aus x_1, x_2, x_3 und die erzeugende Operation von O ist die Funktion von zwei Variablen. Enthält B (O) alle Funktionen von drei Variablen? Das ist der Fall: Es sei z. B. $f(x_1, x_2, x_3)$ in $0 \leqq x_i \leqq 1$ erklärt.

Ich komme zu einer Klasse von Problemen, bei denen die Variablenzahl eine be-
Man denke sich $0 \leqq x_2 \leqq 1$, $0 \leqq x_3 \leqq 1$ umkehrbar eindeutig auf die Strecke $0 \leqq y \leqq 1$ abgebildet und setze $x = x_1$. Dann ist der Würfel umkehrbar eindeutig auf das Quadrat $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ abgebildet. Es sei $x_1 = x$, $x_2 = \alpha(y)$, $x_3 = \beta(y)$ die Abbildung. Dann wird

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x, \alpha(y), \beta(y) = F(x, y).$$

Es sei $x = x_1$, $y = \varphi(x_2, x_3)$ die Abbildung. Dann ist

$$F(x_1, \varphi(x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$$

Hilbert hat angegeben und in Vorlesungen vorgetragen, dass man nicht jede analytische Funktion von 3 Variablen aus analytischen Funktionen von 2 Variablen herstellen kann. Ich selber habe kürzlich gezeigt, dass man nicht jede stetige Funktion von drei Variabeln aus stetigen Funktionen von 2 Variabeln herstellen kann. Das sind leider zunächst reine Existenzbeweise. Man möchte wünschen, dass konkrete Beispiele angegeben würden und dass charakteristische Eigenschaften der betr. Funktionen gefunden würden. Hilbert hat aber in diesem Zusammenhang ein anderes, viel tiefer liegendes Problem hervorgehoben: Kann man jede algebraische Funktion von drei Variablen aus algebraischen Funktionen von zwei Variablen herstellen? Das Problem ist noch ungelöst, wenn auch Herr Tschebotaröw den ersten Schritt zu seiner Lösung gefunden hat.

Mit diesem Problem, auf dessen Herkunft aus der Nomographie man gerne zu verweisen pflegt, hängt eine Frage aus der klassischen Theorie der geometrischen Konstruktionen eng zusammen. Bekanntlich kann man jedes Problem dritten oder vierten Grades mit Zirkel und Lineal lösen, wenn eine passende feste Kurve, z. B. ein nichtsingulärer Kegelschnitt gezeichnet vorliegt. Auch Probleme 5. und 6. Grades kann man so lösen. Die Richtigkeit der Hilbertschen Vermutung würde aber besagen, dass man schon die Probleme siebten Grades nicht alle mit Zirkel und Lineal und einer festgezeichneten algebraischen Kurve lösen kann. Gäbe es sogar algebraische Funktionen siebten Grades von drei Variablen, die sich nicht aus stetigen Funktionen von zwei Variablen herstellen lassen, so wäre die Unmöglichkeit derartiger geometrischer Konstruktionsverfahren noch schlagender belegt.

In seiner Arbeit über die Gleichung neunten Grades hat Hilbert noch ein etwas anderes Problem gestellt. Inwieweit kann man Funktionen von zwei Variablen aus

Funktionen von einer Variablen und der Summenbildung als einziger zweivariabliger Operation herstellen?

Ostrowski hat sogar gezeigt, dass die Funktion

$$\zeta(x, s) = \frac{x}{1^s} + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \cdots\cdots$$

nicht aus analytischen Funktionen von einer Variablen und beliebigen algebraischen Funktionen mehrerer Variabler aufgebaut werden kann. Das beruht darauf, dass diese Funktion keiner algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt. Ostrowski hat nämlich das bemerkenswerte Ergebnis gewonnen, dass jede aus analytischen Funktionen einer Variablen und aus algebraischen Funktionen beliebig vieler Variabler aufgebaute Funktion einer algebraischen partiellen Differentialgleichung genügt.

Bemerkenswert ist wohl auch die Feststellung, dass man im Bereich des Dirichletschen Funktionsbegriffes jede Funktion von zwei Variablen mit Hilfe von Funktionen einer Variablen und des Summenprozesses aufbauen kann, nämlich in der Form $G[f(x_1) + g(x_2)]$. Das beruht darauf, dass man das Quadrat $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1$ durch eine Funktion $x = F[f(x_1) + g(x_2)]$ umkehrbar eindeutig auf die Strecke $0 \leqq x \leqq 1$ abbilden kann. Ist dann $f(x_1, x_2)$ eine im Quadrat erklärte Funktion und $x_1 = \alpha(x)$, $x_2 = \beta(x)$ die inverse Abbildung, so wird

$$f(x_1, x_2) = f[\alpha(x), \beta(x)] = \Phi(x) = \Phi F[f(x_1) + g(x_2)] = G[f(x_1) + g(x_2)].$$

Die Funktionen $f(x_1)$, $g(x_2)$ müssen so gewählt werden, dass nie im Quadrat

$$f(x_1') + g(x_2') = f(x_1'') + g(x_2'')$$

solange

$$(x_1', x_2') \neq (x_1'', x_2'').$$

Denken wir uns die Wertevorräte $\xi = f(x_1)$ und $\eta = g(x_2)$ auf ξ und η-Achsen aufgetragen, so hat $\xi + \eta$ einen festen Wert auf den Geraden $\xi = \eta = \text{const.}$ Wir müssen daher die Wertvorräte so wählen, dass auf keiner Geraden $\xi + \eta = \text{const.}$ mehr als ein Eckpunkt aus dem Liniennetz $\xi = f(x_1)$, $\eta = g(x_2)$ liegt, so also, dass im Liniennetz kein Quadrat vorkommt. Nun gibt es nicht abzählbare Körper reeller Zahlen, die nicht alle reellen Zahlen enthalten[5]. (Der Körper hat die Mächtigkeit des Kontinuums.) Die Zahlen eines solchen Körpers K wählen wir als Wertevorrat von $\xi = f(x_1)$. Den Wertevorrat von $\eta = g(x_2)$ müssen wir dann so wählen, dass unter den Differenzen $g(x_2') - g(x_2'')$ keine vorkommt, die einer Differenz $f(x_1') -$

[5]) Das erste Beispiel gab Suslin in einer posthumen von Kuratowski herausgegebenen Arbeit (Fund. math. 4). Weitere Beispiele bei Beppo Levi, Rend. R. Acc. d. Linc. (5), 32, (1923) S. 600—603), J. von Neumann, Math. Ann. Bd. 99 (1928) S. 134—141.

$f(x_1'')$ gleich ist. Sei a eine reelle Zahl, die im Körper K fehlt. Wir nehmen als Wertvorrat von g die Zahlen $\frac{1}{a} K$. Dann kann keine Differenz $\frac{1}{a} (K_1 - K_2)$ einer Differenz $K_1' - K_2'$ gleich sein, weil sonst

$$a = \frac{K_1 - K_2}{K_1' - K_2'}$$

in K läge.

$$f(x_1) + g(x_2)$$

bildet dann das Quadrat umkehrbar eindeutig auf eine Teilmenge von $0 \leqq x \leqq 1$ ab, die gewiss die Mächtigkeit des Kontinuums hat. Eine passende Funktion

$$F[f(x_1) + g(x_2)]$$

leistet dann die umkehrbar eindeutige Abbildung des Quadrates auf die Strecke.

In diesem Zusammenhang verdient ein hübsches Ergebnis von Fräulein Bary Erwähnung: Jede stetige Funktion einer Variablen kann durch Ineinanderschachtelung von vier total stetigen Funktionen oder von vier Funktionen beschränkter Schwankung dargestellt werden.

Ich breche hier ab. Ich könnte noch aus manchem anderen Gebiete Fragen nennen, die sich in unseren Problemkreis einordnen, wie z. B. die viel behandelten Probleme der algebraischen Rektifizierbarkeit, das unangegriffene nach algebraischen Flächen konstanter negativer Krümmung usw.

Es ist ein etwas lockeres Band, das die verschiedenen hier berührten Fragen zusammenhält. Schon die Operationen sind so verschiedener Natur, dass man eine einheitliche Methode nicht erwarten darf. Auch bei einer Deutung im Funktionenraum handelt es sich um recht verschiedenartige Transformationen, denen aber gemeinsam ist, dass sie mehreren Punkten des Funktionenraumes einen neuen zuordnen. Die Theorie solcher Abbildungen scheint noch kaum in Angriff genommen.

Ich konnte wenig fertige Ergebnisse vorführen. Ich kann nur hoffen, dass das Unfertige einen Anreiz bieten möge, sich an der Vollendung zu versuchen.

Literatur

N. Bary, Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues. Math. Ann. 103 (1930), S. 185—248, 598—613.

L. Bieberbach, Bemerkungen zum dreizehnten Hilbertschen Problem. Crelles Journal, Bd. 165 (1931), S. 89—92.

D. Hilbert, Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten. 1900, S. 280 und C. R. du 2e congr. internat. d. math., Paris 1902, S. 100.

D. Hilbert, Über die Gleichung neunten Grades. Math. Ann. 97 (1926), S. 243—250.

J. Liouville, Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. Crelles Journal, Bd. 13 (1835), S. 93—118.

J. Liouville, Mémoire sur la classification des transcendants et sur l'impossibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction fini explicite des coefficients. Journal de math., Bd. 2 (1837), S. 56—105; Bd. 3 (1838), S. 523—546.

J. Liouville, Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles de second ordre en quantités finis et explicites. Journal de math. Bd. 4 (1839), S. 423—456.

J. Liouville, Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati. Journal de Math., Bd. 6 (1841), S. 1—13.

G. Nöbeling, Über eine n-dimensionale Universalmenge im R_{2n+1}. Math. Ann. 104 (1930), S. 71—80.

A. Ostrowski, Zum Hölderschen Satz über die Gammafunktion. Math. Ann. 94 (1925), S. 248—251.

A. Ostrowski, Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen. Math. Ztschr., Bd. 8 (1920), S. 241—298.

J. F. Ritt, On algebraic functions which can be expressed in terms of radicals. Am. Trans 24 (1922), S. 21—30.

J. F. Ritt, On the integrals of elementary fonctions. Am. Trans 25 (1923), S. 211—222.

J. F. Ritt, Elementary functions and their inverses. Am. Trans 27 (1925), S. 68—90.

J. F. Ritt, Simplification de la méthode de Liouville dans la théorie des fonctions élémentaires. C. R. 183 (1926), S. 331—332.

J. F. Ritt and *E. Gourin,* An assemblage theoretic proof of the existence of transcendentally transcendental functions. Bull. Am. math. Soc. 33 (1927), S. 182—184.

J. F. Ritt, On integration in finite terms of linear differential equations of the second order. Bull. am. math. Soc. 33 (1927), S. 51—57.

F. Schottky, Zur Frage: Haben die Klassenfunktionen Differentialgleichungen? Sitzber. Pr. Akadem. d. Wiss., 1922, S. 414—423.

The calculus of variations in the large

By Marston Morse, Cambridge, U. S. A.

Introduction. The theory to be presented here may be described as the analogue for functionals of the author's theory[9] of critical points[5] of a function f of n variables. The latter theory proceeds by virtue of three principal steps.

(1). The determination of the topological characteristics of the domain R of definition of the function.

(2). The assignment of type numbers to the critical sets.

(3). The determination of the relations between the topological characteristics of R and the type numbers of the critical sets of f.

Relative to step (1) we say simply that for functions (but not for functionals) an adequate topological theory is already at hand.

Relative to step (2) we remark that in case the function is analytic and the domain is a finite, analytic, regular n-manifold without boundary, the critical sets are necessarily finite in number. In case a critical set is an isolated point P and the hessian of f does not vanish at P (the non-degenerate case) type numbers M_k are assigned by the author to P as follows. Let k be the index of the quadratic form whose coefficients are the elements of the hessian of f at P. Corresponding to P we take all of the type numbers as zero except M_k and take M_k as 1. In the case of the general critical set ω, type numbers are assigned to ω in a way which is a generalization of the assignment in the non-degenerate case. If N_i is now the sum of the type numbers M_i assigned to the different critical sets ω of f, we have shown that

$$N_i \geqq R_i \tag{0.1}$$

where R_i is the *ith connectivity* (*mod.* 2) *of the domain R*. The assignment of type numbers to the general critical set ω is one which has the following remarkable property. If the function f is approximated sufficiently closely by a non-degenerate function F (one whose critical points are all non-degenerate), there will always appear, neighboring a critical set of f, a set of isolated, non-degenerate critical points of F whose type number sums ΣM_i are at least as great as the respective numbers M_i which we have assigned to ω. Moreover it can be shown that the function f can always be approximated by a non-degenerate function F.

The relations (0.1) establish the existence of the *topologically necessary critical points*. If $N_i > R_i$ for a particular i, we say that there exists an *excess* of critical points of index i. This excess is not arbitrary. In fact the numbers N_i and R_i must satisfy the relations

$$
(0.2)\qquad
\begin{aligned}
N_0 &\geqq R_0\\
N_0 - N_1 &\leqq R_0 - R_1\\
N_0 - N_1 + N_2 &\geqq R_0 - R_1 + R_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
N_0 - N_1 + \ldots + (-1)^n N_n &= R_0 - R_1 + \ldots + (-1)^n R_n.
\end{aligned}
$$

We call the relations (0.2) *limitations on the excess of critical points*[16]. These relations are complete in a sense upon which we shall not here enlarge.

We now turn to the calculus of variations. Corresponding to a given set of boundary conditions B, we shall regard a Jordan arc which satisfies the conditions B as a point in function space. The conditions B might, for example, require the end points of the arc to be fixed, or to lie on two end manifolds. The totality of the Jordan arcs satisfying conditions B will be termed the *functional domain* Ω *associated* with B. Step (1) now calls for new developments. We proceed by defining bounding on Ω, cycles on Ω, and the connectivities R_i of Ω ($i = 0, 1, \ldots$). In contrast with ordinary topology we find that infinitely many of the connectivities of Ω are in general not null.

One naturally replaces the function f by the calculus of variations integral, and the critical points of f by critical extremals, that is, extremals satisfying the transversality conditions associated with the boundary problem B. We restrict ourselves to the analytic case. Basic critical sets ω are here maximal sets of critical extremals, mutually deformable into one another among extremals of ω. We solve the difficult problem of characterizing the non-degenerate critical point and of assigning type numbers to each critical set. In general there will be infinitely many critical sets. The value of the integral on extremals of a critical set ω will be constant. In the analytic case the critical values will be isolated.

Whereas the type numbers of a critical set ω of an ordinary function f consist of a set of $n + 1$ numbers, here the type numbers of ω consist of an infinite set of numbers

$$M_0, M_1, \ldots$$

For any particular set ω all but a finite subset of these numbers M_i will be null. But the indices i of the non-null type numbers M_i in general will not be bounded for all critical sets ω of the problem. This corresponds to the fact that the indices i of non-null connectivities R_i of the function manifold Ω are in general not bounded, and that the relations (0.1) still hold. These relations are very powerful and will in general prove the existence of infinitely many critical extremals. The limitations (0.2) on the excess of critical extremals now become an infinite set of inequalities of the same form and produce a host of remarkable relations.

As a matter of pure topology, the connectivities of our functional domain reduce upon suitable specialization of the boundary conditions and the integral to the ordinary connectivities of an ordinary manifold, or if we please, to the connectivities of a product manifold. Other simple specializations are possible.

The present paper is necessarily limited. The special case of the periodic extremal is not treated here. References to that part of the theory which has been published are given at the end. A more complete treatment will be given in the Colloquium Lectures on "The Calculus of Variations" given in September, 1931 and to be published shortly. Other references are given at the end.

1. *An integral on a Riemannian space.* In this section we shall give a definition of a Riemannian space in the large and define an integral thereon.

Riemannian spaces as ordinarily defined are local affairs. It is necessary for us to add topological structure in the large. To that end we suppose that we have given an ordinary m-dimensional simplicial circuit K_m in an auxiliary Euclidean space on which the neighborhood of each point is well defined. (See Lefschetz **ref. 13.**) Our Riemannian space R will now be defined as follows. Its points and their neighborhoods shall be the one-to-one images of the respective points and their neighborhoods on K. Moreover K_m shall be of such nature that the neighborhood of each of its points is homeomorphic with the neighborhood of a point (x) in an Euclidean m-space of coordinates $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$. With at least one such representation of the neighborhood of a point of R there shall be associated a positive definite Riemannian form

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j) = (1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

defining a metric[14] for the neighborhood. For simplicity we suppose that the coefficients $g_{ij}(x)$ are analytic. We term the coordinates (x) *admissible*. We also admit any other set of local coordinates (z) obtainable from admissible coordinates (x) by a transformation of the form

$$z^i = z^i(x), \tag{1.2}$$

defined by functions $z^i(x)$ analytic in (x) and possessing a non-vanishing Jacobian. We require that any two coordinate systems (x) and (z) which admissibly represent the neighborhood of the same point P must be related as in (1.2). We term (1.2) an admissible transformation of coordinates.

A set of points of R will be said to form a regular analytic n-manifold on R if the images of its points in any local coordinate system (x) is locally representable in the form

$$x^i = x^i(u_1, \ldots, u_n)$$

where the functions $x^i(u)$ are analytic in the parameters (u) and the functional matrix of the functions $x^i(u)$ is of rank n.

With each admissible coordinate system (x) we suppose that we have given a function

$$F(x, r) = F(x^1, \ldots, x^m, r^1, \ldots, r^m) \qquad (r) \pm (0)$$

serving to define an invariant integral

$$\int F(x, \dot{x})\, dt$$

in that system, where $\overline{x^i}$ represents the derivative of x^i with respect to a parameter t.

For at least one admissible coordinate system neighboring each point of R (and consequently for all such coordinate systems) we assume that the corresponding integrand is *positive* and *analytic* in (x) and (r) for $(r) \neq (0)$. We also assume that $F(x, r)$ is positively homogeneous of order 1 in the variables (r), as in the classical theory of Weierstrass. We further assume that the form

$$(1.3) \qquad F_{r^i r^j}(x, r)\, \lambda^i \lambda^j \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

is positive for unit vectors $(\lambda) \neq (r)$.

2. *The functional domain and its connectivities.* Let A^1 and A^2 be any two distinct points on R. The points A^1 and A^2 are to serve as the initial and final points respectively of admissible curves. Locally we represent A^1 and A^2 by sets of coordinates

$$(x) = (x^{11}, \ldots, x^{m1}) \qquad (x) = (x^{12}, \ldots, x^{m2})$$

respectively. Let B_r be an auxiliary simplicial r-cycle with $0 \leq r < 2m$. Suppose that we have a set of pairs of points (A^1, A^2) homeomorphic with B_r. We understand that $A^1 \neq A^2$ and that A^1 and A^2 lie on R. For $r > 0$ we suppose that the neighborhood of each point of B_r can be represented as the one-to-one continuous image of a neighborhood of a point (a_0) in our auxiliary Euclidean r-space of r coordinates (a) and that the corresponding points (A^1, A^2) can be locally represented in the form

$$x^{is} = x^{is}(a) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ s = 1, 2)$$

where the functions $x^{is}(a)$ are analytic in (a) for (a) near (a_0) and possess a functional matrix of rank r. We call this set of points (A^1, A^2) the *terminal manifold* Z.

Let γ be a sensed Jordan arc on R on which a parameter t runs from 0 to 1 inclusive. If the respective end points of γ determine a point (A^1, A^2) on Z, γ will be termed *topologically admissible*. When we are dealing with our integral we shall suppose that γ is of class D^1 as well as topologically admissible. We then term γ a *restricted* curve. Evaluated on restricted curves the integral defines our *basic functional* J.

The totality of topologically admissible curves will be termed the functional domain Ω corresponding to the space R and terminal manifold cape.

By a j-complex k_j on Ω we mean a j-parameter family of curves of Ω given as the continuous map of the product $c_j \times t$ of an auxiliary j-complex c_j, and the line segment $0 \leqq t \leqq 1$, with each curve γ corresponding to the product of a point of c_j and the line segment. As in the theory of singular complexes we regard points on these curves as distinct if they are images of distinct points on $c_j \times t$. In this family the curves corresponding to the product of a j-cell of c_j and the line segment t will define a family of curves which we call a k-cell of k_j. To *subdivide* k_j we subdivide c_j.

The boundary of k_j (mod. 2) shall be the $(j - 1)$-complex on Ω which is the image in the above map of the product of the boundary (mod. 2) of c_j and the line segment $0 \leqq t \leqq 1$. A j-complex on Ω will be termed a j-cycle if without boundary. A set of j-cycles on Ω is termed homologous to zero if the cycles of the set form the boundary of a $(j + 1)$-complex on Ω. Everything is to be understood mod. 2. We see that the usual operations with homologies are permissible.

By the *connectivity* P_j of Ω, $j = 0, 1, \ldots$ we mean the maximum number of j-cycles on Ω between which there is no homology, provided such a maximum exists. If no such maximum exists we say that P_j is infinite.

The connectivities of Ω are invariant under any topological transformation of R which carries admissible end points (A^1, A^2) into admissible end points. For purposes of pure topology the analyticity of R and Z is of course unessential.

3. *The function* $J\,(\Pi)$. It is well known that there exists a positive constant e, small enough to have the following properties. Any extremal arc E on which $J < e$ will give an absolute minimum to J relative to all sensed curves of class D^1 joining E's end points. On E the local coordinates of any point will be analytic functions of the local coordinates of the end points of E and of the distance of P along E from the initial end point Q of E, at least as long as E does not reduce to a point. The set of all extremal segments issuing from Q with $J < e$ will form a field covering a neighborhood of Q in a one-to-one manner, Q alone excepted. We now choose a positive constant ϱ less than e and make the following definition.

Any extremal segment on R for which J is less than ϱ will be called an elementary extremal.

An ordered set of $p + 2$ points

$$A^1, P^1, \ldots, P^p, A^2 \tag{3.1}$$

on R with (A^1, A^2) on the terminal manifold will be denoted by (Π). The points (3.1) will be called the vertices of (Π). It may be possible to join the successive points in (3.1) by elementary extremals. In such a case (Π) will be termed *admissible*. The resulting broken extremal will be denoted by $g\,(\Pi)$ and also termed admissible. The value of J taken along $g\,(\Pi)$ will be denoted by $J\,(\Pi)$.

Let a copy of R be provided for each point P^i. Points (Π) can be represented as points on the *product complex* Π whose factors are the auxiliary r-circuit B_r of § 2 and these p copies of R.

We shall regard $J(\Pi)$ locally as a function Φ of the parameters (a) locally representing its vertices A^1, A^2, and of the successive sets of coordinates (x) locally representing its vertices P^j. The function Φ will be analytic at least as long as the successive vertices remain distinct. A point (Π) with successive vertices distinct will be called a *critical point* of $J(\Pi)$ if all of the first partial derivatives of the function Φ are zero at that point.

If the successive vertices are distinct, the condition that Φ_{ah} be null is seen to be

$$[F_{r^i}(x, \overline{x})\, x^{is}{}_{ah}]_{s=1}^{s=2} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, r) \tag{3.2}$$

where $(x, \overline{x})$ is to be evaluated on $g(\Pi)$ at the final end point of $g(\Pi)$ when $s = 2$, and at the initial end point of $g(\Pi)$ when $s = 1$. The r conditions (3.2), ($h = 1, \ldots, r > 0$), are called the *transversality conditions.*

The partial derivative of Φ with respect to the ith coordinate of a vertex (x) is seen to be

$$F_{r^i}(x, p) - F_{r^i}(x, q) \tag{3.3}$$

where (p) and (q) are the direction cosines at (x) of the elementary extremals of $g(\Pi)$ preceding and following (x) respectively. With the aid of (3.3) we could readily prove that a necessary and sufficient condition that an admissible point (Π), with successive vertices distinct, be a critical point, is that $g(\Pi)$ be a critical extremal, that is one satisfying the transversality conditions (3.2).

By a *critical set* σ of $J(\Pi)$ we understand any set of critical points on which $J(\Pi)$ is constant, and which is at a positive distance from other critical points of $J(\Pi)$. A critical set need not be connected. It is not necessarily closed since σ may have limit points (Π) whose successive vertices are not all distinct.

We shall regard a continuous family of critical extremals as *connected* if any curve of the family can be continuously deformed into any other curve of the family through the mediation of curves of the family. The set of all critical extremals on which $J < b$ make up at most a finite set of connected families of extremals on each of which J is constant.

4. *The connectivities of the domain $J(\Pi) < b$.* Let b be a non-critical value of J. Suppose the number, $p + 2$, of vertices in (Π) is such that

$$(p + 1)\,\varrho > b.$$

Understanding that points (Π) for which $J(\Pi)$ is evaluated are always restricted to admissible points (Π), we come to the problem of proving that the connectivities of the domain $J(\Pi) < b$ are finite. We shall accomplish this by deforming the domain

$J(\Pi) < b$ on itself onto a subdomain which is a subcomplex of the product complex Π.

In defining our deformations it will be convenient to term the value of J taken along a restricted curve g the *J-length* of the curve. Along g the J-length, measured from a fixed point to a variable point P and taken with a sign in accordance with the sense of measurement, will be termed the *J-coordinate* of P on g. If the J-coordinate of P is a differentiable function $h(t)$ of the time t, then P will be said to be moving at the time t on g at a *J-rate* equal to $h'(t)$.

We now define certain deformations of admissible points (Π) through admissible points (Π), which do not increase $J(\Pi)$ beyond its initial value, and which deform complexes of points (Π) continuously. Such deformations will be called J-deformations.

The deformation D_1. Let (Π) be an admissible point (Π). As the time t increases from 0 to 1, let the p vertices P^i of (Π) move along $g(\Pi)$ from their initial positions to a set of positions which divide g into $p + 1$ successive segments of equal J-length, each vertex moving at a constant J-rate.

The deformation D_2. Let P^i be a vertex of (Π). Let h' and h'' be respectively the elementary extremals which join P^i to the preceding and following vertices (possibly coincident with P^i). As the time t increases from 0 to 1, let points H_t' and H_t'' start from P^i and move away from P^i respectively on h' and h'' at J-rates equal in absolute value to one half the J-lengths of h' and h''. Let H_t' and H_t'' be joined by an elementary extremal E_t. The deformation D_2 is hereby defined as one in which P is replaced at each time t by that point P_t which divides E_t into two segments of equal J-length.

That D_1 and D_2 are J-deformations follows readily. (Ref. 8, § 5.)

The two preceding deformations are designed to lower the value of $J(\Pi)$ in case $g(\Pi)$ is not an extremal. In case $g(\Pi)$ is an extremal but not a critical extremal, we must turn to the end conditions. The preceding deformations are independent of the local representation of the vertices deformed. To obtain the same result for our deformation of the end points we must employ the technique of tensor analysis.

With the terminal manifold $(r > 0)$ we now associate a metric defined by the quadratic form

$$ds^2 = \left(g^2_{ij}\frac{\partial x^{i\,2}}{\partial a^h}\frac{\partial x^{j\,2}}{\partial a^k} + g^1_{ij}\frac{\partial x^{i\,1}}{\partial a^h}\frac{\partial x^{j\,1}}{\partial a^k}\right) d\,a^h\, d\,a^k = a_{hk}(a)\, d\,a^h\, d\,a^k \tag{4.1}$$

$$(h, k = 1, \ldots, r)$$

where g^s_{ij} stands for $g_{ij}(x)$ evaluated for $x^i = x^{is}(a)$. The quadratic form hereby defined is positive definite by virtue of the hypothesis that the matrix of partial derivatives of the functions $x^{is}(a)$ has the maximum rank. Let a^{hk} be the cofactor of a_{hk} in the determinant $|a_{hk}|$ divided by that determinant.

Let (Π) be an admissible point neighboring an admissible point (Π_0) with successive vertices distinct. Let (z) represent the set of local coordinates of the intermediate vertices of (Π), and (α) the parameters determining the end vertices of (Π). The first and last elementary extremals of $g(\Pi)$ can be respectively represented by analytic functions in the form

$$
\begin{aligned}
x^i &= \Phi^{i1}(t, \alpha, z) \\
x^i &= \Phi^{i2}(t, \alpha, z) \qquad (i = 1, \ldots, m).
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

We suppose t has been so chosen on $g(\Pi)$ that it is a constant multiple of the arc length on $g(\Pi)$ and equals 0 and 1 at the respective ends of $g(\Pi)$. We now consider the differential equations

$$
\frac{d\alpha^k}{d\tau} = -\left[F_{r^i} \frac{\partial \overset{is}{x}(\alpha)}{\partial \alpha^h}\right]_{s=1}^{s=2} \overset{hk}{a}(\alpha) = M^k(\alpha, z) \qquad (h, k = 1, \ldots, r) \tag{4.3}
$$

in which x^i and r^i in F_{r^i} are given by

$$
\begin{aligned}
x^i &= \Phi^{i2}(1, \alpha, z) \qquad & r^i &= \Phi_t^{i2}(1, \alpha, z) \qquad & s &= 2 \\
x^i &= \Phi^{i1}(0, \alpha, z) \qquad & r^i &= \Phi_t^{i1}(0, \alpha, z) \qquad & s &= 1
\end{aligned}
$$

for $s = 2$ and 1 respectively. For each set (z) we regard the equations (4.3) as differential conditions on the variables (α). Relative to non-singular analytic transformations of the parameters (α), the two members of (4.3) are contravariant vectors associated with the terminal manifold. Relative to similar transformations of the coordinates (x) of the end points the two members of (4.3) are invariant. The trajectories defined by (4.3) are accordingly independent of the local parameters (α) or coordinates (x) used.

Let the *distance* between two nearby points (Π) and (Π_0) be measured by the square root of the sum of the squares of the geodesic distances on R between corresponding vertices of (Π) and (Π_0). A point (Π) which is admissible and which determines elementary extremals of equal J-length will be termed *J-normal*. Note that the right members of (4.3) are not necessarily analytic if the successive vertices of (Π) are not distinct. Let ω be the set of all J-normal points (Π) for which $J < b$. Let μ be a positive constant so small that a point (Π) within a distance μ of some point of ω will be admissible and have successive vertices distinct. Let (α_0, z_0) represent such a point (Π) and let $\Psi^k(r)$ represent a solution of

$$
\frac{d\alpha^k}{d\tau} = M^k(\alpha, z_0) \qquad (k = 1, \ldots, r),
$$

which reduces to (α_0) for $\tau = 0$. If μ is sufficiently small, the point (Π) for which $(z) = (z_0)$ and $\alpha^k = \Psi^k(\tau)$ will continue to be admissible and have its successive vertices distinct for $0 \leq \tau \leq \mu$ independently of the particular initial point (α_0, z_0) chosen.

The deformation D_3. Under D_3 a point (Π) which is at a distance $d < \mu$ from the set of all J-normal points on $J(\Pi) < b$ and which is represented by the point (a_0, z_0) when $t = 0$ shall be replaced at the time t $(0 \leqq t \leqq 1)$ by the point (Π) for which $(z) = (z_0)$ and

$$a^k = \Psi^k[(\mu - d)\,t] \qquad\qquad a^k(0) = a^k{}_0$$

while points for which $d \nless \mu$ shall remain fixed.

Under D_3 points (Π) for which $d < \mu$ are deformed so that

$$(4.4) \qquad \frac{dJ}{dt} = \frac{dJ}{d\,a^k}\,\frac{d\,a^k}{d\,t} = \left[F_{r^i}\,\frac{\partial x^{is}}{\partial a^k}\right]_1^2 \left[F_{r^j}\,\frac{\partial x^{js}}{\partial a^h}\right]_1^2 a^{hk}(a)\,(d - \mu) \leqq 0.$$

In particular if (Π) is a J-normal point we have $d = 0$. If $g(\Pi)$ is a non-critical extremal, the r components (3.2) are not all zero and $dJ/dt < 0$ since the elements a^{hk} are the coefficients of a positive definite form. Thus $J(\Pi)$ is never increased under D_3, and is actually decreased if (Π) is a J-normal point and $g(\Pi)$ a non-critical extremal.

Lemma 4. 1. The connectivities of the domain $J(\Pi) < b$ are finite.

To the points of the domain $J(\Pi) \leqq b$ we apply the product deformation (taking the factors in the order written).

$$T = D_1\,D_2\,D_1\,D_3.$$

We note that the boundary of $J(\Pi) < b$ will consist of points (Π) for which $J(\Pi) = b$ and points at which $M(\Pi) = \varrho$ where $M(\Pi)$ is the maximum J-lenght of the elementary extremals of $g(\Pi)$. Since p has been chosen so that $(p + 1)\,\varrho > b$ we see that points for which $M(\Pi) = \varrho$ will be deformed under D_1 into points for which $M(\Pi) < \varrho$. Moreover under D_2, $M(\Pi)$ is not increased, while D_3 carries admissible points into admissible points. Hence under T points for which $M(\Pi) = \varrho$ are carried into points which $M(\Pi) < \varrho$.

To show that T carries points for which $J(\Pi) = b$ into points for which $J(\Pi) < b$, we divide admissible points on the domain $J(\Pi) \leqq b$ into three classes as follows.

Class I shall contain those points (Π) which are deformed under D_1 into a point (Π_1) for which at least one elementary extremal is null.

Class II shall contain the remaining points (Π) for which $g(\Pi_1)$ is *not* an extremal.

Class III shall contain the remaining points (Π) for which $g(\Pi_1)$ is an extremal.

If (Π) belongs to Class I, we see that $J(\Pi)$ is decreased under D_1 and hence under T. If (Π) belongs to Class II, $g(\Pi_1)$ possesses an actual corner formed by two successive elementary extremals so that $J(\Pi)$ is decreased under $D_1\,D_2$ and hence under T. If (Π) belongs to Class III, $J(\Pi)$ is not decreased under $D_1\,D_2$ but is decreased under T by virtue of (4.4) unless $g(\Pi_1)$ is a critical extremal. But in such a case

$J(\Pi_1) < b$ since b is an ordinary value of J. Thus under T the domain $J(\Pi) < b$ is deformed on itself into a subdomain Σ whose boundary is distinct from that of $J(\Pi) < b$.

Let K be a subcomplex of the product complex Π that contains all of the points of Σ and is so finely subdivided as to consist wholly of points on $J(\Pi) < b$. We see that any cycle on $J(\Pi) < b$ is homologous to a cycle on K so that the connectivities of $J(\Pi) < b$ must be finite. The lemma is accordingly proved.

By a *critical value* of J we mean a value which J assumes on a critical extremal.

We can now prove the following theorem.

Theorem 4.1. *If a and b* ($a < b$) *are two ordinary values of J between which there are no critical values of J, the connectivities of the domains* $J(\Pi) < a$ *and* $J(\Pi) < b$ *will be equal.*

The analysis in the preceding proof shows that the application of the product deformation T^n to the domain $J(\Pi) < b$ for a sufficiently large power n will deform $J(\Pi) < b$ on itself into a subdomain on $J(\Pi) < a$. The theorem follows readily.

5. *The connectivities of the restricted domain* $J < b$. Let k_j be a j-complex on the functional domain Ω of § 2 represented by means of the product complex $c_j \times t$ of an auxiliary j-complex c_j and the line segment $0 \leqq t \leqq 1$. If k_j is composed of restricted curves on which the J-length of the curves from their initial points to the image of a point Q on $c_j \times t$ varies continuously with Q, k_j will be called a *restricted j-complex*. Employing restricted complexes and cycles only, one can now define the connectivities of Ω formally as before. We term these connectivities the *restricted connectivities*. We shall prove the following lemma.

Lemma 5.1. *The restricted connectivity* R_i *of the functional domain* Ω *equals the unrestricted connectivity* P_i *of* Ω.

Let k_j be an unrestricted complex on Ω represented by the product $c_j \times t$ as in § 2. Let P be a point on c_j and $k(P)$ the corresponding curve of k_j. Let p be a positive integer and let $k(P)$ be divided into $p + 1$ segments of equal variation of t. Let (Π) denote the point on Π determined by the successive ends of these segments of $k(P)$, and let h be any one of these segments. If p is sufficiently large (and we suppose it is), each point of h can be joined to the initial point of h by an elementary extremal λ, independently of the curve $k(P)$ of k_j under consideration.

We shall now deform $k(P)$ into $g(\Pi)$. Let τ represent the time during this deformation, $0 \leqq \tau \leqq 1$. At each time τ we suppose h divided into two segments λ and λ' in the ratio of τ to $1 - \tau$ with respect to the variation of t on h. For each value of τ we now replace the second of these segments of h by itself, while we replace the first λ by the elementary extremal μ which joins its end points. We make a point on λ which divides λ in a given ratio with respect to t, correspond to the point on μ which divides μ in the same ratio with respect to the variation of J, assigning to this point on μ the same value of t as its correspondent on λ bears. We denote this deformation by δ_1.

We need to subject the resulting curves $g\,(\Pi)$ to a further deformation δ_2 which does not change the curves $g\,(\Pi)$ except in parameterization. To that end we let the point t on $g\,(\Pi)$ move along $g\,(\Pi)$ to the point on $g\,(\Pi)$ which divides $g\,(\Pi)$ with respect to the J-length in the same ratio as t divides the interval (0,1), moving at a constant J-rate along $g\,(\Pi)$ equal to the J-length of the arc to be traversed. We term the resulting parameterization a *J-parameterization.* In it the parameter t runs from 0 to 1 and is proportional to the J-length of the arc preceding the point t.

We denote the product deformation $\delta_1\,\delta_2$ by Δ_p.

Under Δ_p the curve $k\,(P)$ is carried into a curve $g\,(\Pi)$ with a J-parameterization. If we associate $g\,(\Pi)$ so parameterized with the point P on c_j it appears that the totality of these curves $g\,(\Pi)$ forms are stricted complex $r\,(k_j)$ on Ω representable by $c_j \times t$.

If $k_j \to k_{j-1}$ we see that

$$r\,(k_j) \to r\,(k_{j-1}). \tag{5.1}$$

If k_j is a cycle on Ω, we see then that $r\,(k_j)$ will be a restricted j-cycle homologous to k_j on Ω. It follows that $P_i \leqq R_i$. In particular R_i must be infinite with P_i.

To show that $P_i = R_i$ we have merely to show that a restricted cycle z_j on Ω which bounds an unrestricted complex z_{j+1} on Ω necessarily bounds a restricted complex as well. To that end we suppose that

$$z_{j+1} \to z_j \qquad \text{on } \Omega$$

If the index p of Δ_p is sufficiently large, we can apply Δ_p to z_{j+1}. We then have

$$r\,(z_{j+1}) \to r\,(z_j). \tag{5.2}$$

But if z_j is deformed under Δ_p through the complex w_{j+1} we have (always mod. 2).

$$w_{j+1} \to z_j + r\,(z_j), \tag{5.3}$$

and hence from (5.2) and (5.3)

$$r\,(z_{j+1}) + w_{j+1} \to z_j.$$

Moreover the left complex is a restricted complex since z_j is restricted. Hence $P_i = R_i$ and the lemma is proved.

We shall now prove the following lemma.

Lemma 5.2. The restricted connectivities R_i' of the restricted domain $J < b$ equal the connectivities R_i'' of the subdomain $J\,(\Pi) < b$ of Π. The latter connectivities are thus independent of the number of vertices $(p + 2)$ of their points (Π), provided only that $(p + 1)\,\varrho > b$.

Let c_j be a complex on $J\ (\Pi) < b$. The set of broken extremals $g\ (\Pi)$ determined by points (Π) on c_j if given a 'J-parameterization' will afford a restricted complex $c_j{}^p$ on Ω represented by the product $c_j \times t$. A restricted complex $c_j{}^k$ derived from a complex c_j on Π in this manner will be called a *p-fold complex*.

We see that $c_j{}^p$ will be a cycle on Ω if and only if c_j is a cycle on Π, and that $c_j{}^p$ will bound among p-fold complexes on $J < b$ if and only if c_j bounds on $J\ (\Pi) < b$. The connectivities of the domain $J < b$ on Ω defined in terms of p-fold complexes for a fixed p will then equal the connectivities R_j'' of $J\ (\Pi) < b$.

But on the other hand any restricted j-cycle of Ω on $J < b$ can be deformed under Δ_p among restricted j-complexes of Ω on $J < b$ into a j-complex $c_j{}^p$ on $J < b$, so that $R_i' \leqq R_i''$. To prove that $R_i' = R_i''$ one has merely to prove, as under the preceding lemma, that a p-fold cycle k_j on $J < b$ bounds a restricted complex on $J < b$ only if it bounds a p-fold complex on $J < b$.

To that end we suppose that k_j bounds a restricted complex k_{j+1} on $J < b$. As in (5.2) we have

$$r\ (k_{j+1}) \to r\ (k_j).$$

But the vertices of each curve $g\ (\Pi)$ of $r\ (k_j)$ lie on the curve $g\ (\Pi_1)$ from which it is deformed under Δ_p. We can deform $g\ (\Pi_1)$ into $g\ (\Pi)$ deforming k_j into $r\ (k_j)$ through a complex w_{j+1} by letting each vertex of (Π_1) move along $g\ (\Pi_1)$ to the corresponding vertex of $g\ (\Pi)$ at a J-rate equal to the J-length of the arc of $g\ (\Pi)$ to be traversed. We then have

$$r\ (k_{j+1}) + w_{j+1} \to k_j$$

and the left hand complex is a p-fold complex.

Thus k_j bounds a p-fold complex on $J < b$ if it bounds a restricted complex on $J < b$. Hence $R_i' = R_i''$ and the lemma is proved.

The preceding lemma taken with Theorem 4.1 now gives us the following.

Theorem 5.1. *If a and b, $a < b$, are any two ordinary values of J between which there are no critical values of J, the restricted connectivities of the functional domains $J < b$ and $J < a$ are equal.*

6. *Spannable and critical cycles.* Any two points in our Riemannian space R will be said to possess a *J-distance* equal to the inferior limit of the J-lengths of restricted curves joining the two points. We see that this J-distance between the two points varies continuously with the points.

We shall now define the J-distance between two curves g_1 and g_2 of class D^1.

To that end let us regard points on g_1 and g_2 as *corresponding* if they divide g_1 and g_2 in the same ratio with respect to the J-lengths of their arcs. We now define the *J-distance* $d\ (g_1, g_2)$ *between* g_1 *and* g_2 as the maximum of the J-distances between corresponding points of g_1 and g_2 plus the absolute value of the difference between the J-lengths of g_1 and g_2.

If g_3 is a third curve of class D^1 we have the relation

$$d(g_1, g_3) \leqq d(g_1, g_2) + d(g_2, g_3).$$

With the aid of this relation we see that if g_2 is sufficiently near g_3, that is if $d(g_2, g_3)$ is sufficiently small, $d(g_1, g_2)$ will differ arbitrarily little from $d(g_1, g_3)$. This sort of thing is now well known, developed, for example, in the works of M. Fréchet.

Now let g_1 be any restricted curve. By a *neighborhood* of g_1 on Ω will be meant a set of restricted curves which includes all restricted curves within some small positive distance e of g_1. Let A be a subset of restricted curves on Ω. The curve g_1 will be called a *limit* curve of curves of A if there is a curve of A, other than g_1, in every neighborhood of g_1. The *boundary* of A is the set of restricted curves which are limit curves of curves both of A and $\Omega - A$. Open, closed, and compact sets A are now defined in the usual way. Particular examples of closed and compact sets A are restricted complexes and critical sets of extremals.

If A and B are any two sets of restricted curves, $d(A, B)$ will be defined as the inferior limit of the distances between curves of A and B. If A and B are closed and compact, $d(A, B)$ will be taken on by at least two curves of A and B. The distance $d(g_1, A)$ varies continuously with g_1, that is it changes arbitrarily little if g_1 is replaced by a restricted curve sufficiently near g_1.

Let σ be a critical set of extremals on which $J = c$. Let a and b be two ordinary values of J between which there is no critical value of J other than c. By a *neighborhood* N of σ on the functional domain Ω will be meant a set of restricted curves within a small positive distance of σ. We shall take N as open, that is such that when γ belongs to N all the restricted curves sufficiently near γ also belong to N. We admit only such neighborhoods of σ as consist of curves whose distances from other critical sets is bounded from zero. We also suppose that curves of N satisfy the condition

$$a < J < b.$$

It will be convenient to say that a restricted curve for which $J < c$ is *below the critical value c.*

We shall now introduce certain sets of j-cycles on Ω near the critical set σ. They serve to characterize the basic topological properties of the domain $J < c$ near σ. In defining these sets of cycles the phrase "a maximal set of j-cycles independent on etc." will be used as an abbreviation for the phrase, "a set of j-cycles which contains the maximum number of j-cycles independent with respect to bounding on etc.".

Let N_1 and N be neighborhoods of σ with $N_1 \subset N$.

A j-cycle on N_1 below c, bounding on N_1 but not bounding on N below c, will be called a *spannable* cycle corresponding to N and N_1 (written corr. $N\,N_1$). *A j-cycle* on N_1 independent on N of j-cycles below c will be called a *critical* cycle corr. $N\,N_1$. For suitable choices of N and N_1 we shall see that the following maximal sets of j-cycles exist (are finite).

The set $(a)_j$. A maximal set of spannable j-cycles corr. $N\,N_1$, independent on N below c.

The set $(c)_j$. A maximal set of critical j-cycles corr. $N\,N_1$, independent on N of j-cycles on N below c.

We now state a basic theorem.

Theorem 6. There exists a fixed neighborhood N^* of σ and corresponding to each neighborhood $N \subset N^*$ a neighborhood $M(N) \subset N$ with the following property.

Corresponding to any two choices of the pair of neighborhoods $N\,N_1$ satisfying the conditions

$$N \subset N^* \qquad N_1 \subset M(N) \tag{6.1}$$

there exist common maximal sets of spannable or critical k-cycles on any arbitrarily small neighborhood of σ.

We shall term three neighborhoods $N_0\,N\,N_1$ *admissible* if $N\,N_1$ satisfy (6.1), and $N_0\,N$ also satisfy (6.1) as an instance of $N\,N_1$ in (6.1). We admit only such pairs of neighborhoods $N\,N_1$ as belong to an *admissible triple*. We abbreviate the phrase "corresponding to an admissible pair of neighborhoods $N\,N_1$" by writing it in the form corr. $N\,N_1$.

7. *Classification of cycles of Ω on $J < b$.* Suppose now that σ is the set of all critical extremals at which $J = c$. A spannable k-cycle corr. $N\,N_1$ which does not bound below c will be termed *newly bounding* corr. $N\,N_1$, and a spannable cycle which bounds below c a *linkable* cycle corr. $N\,N_1$. We see that a maximal set $(a)_k$ of spannable k-cycles can be made up of a maximal set $(l)_k$ of linkable k-cycles independent on N below c, together with a maximal set $(b)_k$ of newly bounding k-cycles independent on N below c of linkable k-cycles.

Let l_{k-1} be any linkable $(k-1)$-cycle corr. $N\,N_1$. We have

$$\lambda_k'' \to l_{k-1} \qquad \text{below } c \tag{7.0}$$

where λ_k'' is a k-complex on Ω. But we also have

$$\lambda_k' \to l_{k-1} \qquad \text{on } N_1 \tag{7.1}$$

where λ_k' is again a complex on Ω. We now introduce the k-cycle

$$\lambda_k' + \lambda_k'' = \lambda_k \tag{7.2}$$

We say that λ_k links l_{k+1} corr. $N\,N_1$.

A set of k cycles $(\lambda)_k$ linking the respective $(k-1)$-cycles of a maximal set of linkable $(k-1)$-cycles corr. $N\ N_1$ will be called a *maximal set of linking k-cycles* corr. $N\ N_1$.

A k-cycle below c independent below c of the newly bounding k-cycles corr. $N\ N_1$ will be called an *invariant* k-cycle corr. $N\ N_1$. By a maximal set $(i)_k$ of invariant k-cycles corr. $N\ N_1$ is meant a set of such k-cycles, independent below c of newly bounding k-cycles corr. $N\ N_1$.

We now state the basic theorem.

Theorem 7.1. *A maximal set of restricted k-cycles on $J < b$ is afforded by maximal sets of linking, critical, and invariant k-cycles corr. $N\ N_1$.*

We also have the following.

In case c is an absolute minimum of J, and b separates c from the other critical values of J, then a maximal set of restricted k-cycles on $J < b$ is afforded by the critical k-cycles corr. $N\ N_1$.

8. *The existence of critical extremals.* Relative to the critical value c we shall call a k-cycle a *new* k-cycle if it is independent on $J < b$ of cycles on $J < a$. We shall consider maximal sets of new k-cycles independent on $J < b$ of k-cycles on $J < a$. By virtue of Theorem 7.1 such a maximal set will be afforded by a maximal set of critical k-cycles corr. $N\ N_1$ and linking k-cycles corr. $N\ N\ N_1$.

Relative to the critical value c we shall call a k-cycle *newly bounding* if it lies on $J < a$, is bounding on $J < b$, but non-bounding on $J < a$. We shall consider maximal sets of newly bounding k-cycles independent on $J < a$ but bounding on $J < b$. According to Theorem 7.1 such a maximal set will be afforded by a maximal set of newly bounding k-cycles corr. $N\ N_1$.

The number of cycles in a maximal set of new k-cycles depends upon more than the neighborhood of o. The same is true of the number of cycles in a maximal set of newly bounding $(k-1)$-cycles. It is a remarkable fact however that the *sum* of the two preceding numbers depends only upon the nature of J neighboring σ, in fact is the number of cycles in a maximal set of critical k-cycles, and a maximal set of spannable $(k-1)$-cycles. Moreover this sum is additive for the separate critical sets. We are thus led to the following definition.

The kth *type number M of a critical set σ shall be defined as the number of cycles in the corresponding maximal sets of critical k-cycles and spannable $(k-1)$-cycles corr. $N\ N_1$.*

The kth type number of a sum of critical sets will be defined as the sum of the respective type numbers of the component sets.

We state the following principal theorem.

Theorem 8. *Let $N_0\ N_1\ \ldots$ be the type number sums for all critical sets of extremals,* *and let $P_0\, P_1 \ldots$ be the connectivities of the function space Ω. If the numbers N_i are finite they satisfy the infinite set of inequalities.*

$$
\text{(A)} \qquad
\begin{aligned}
N_0 &\geqq P_0 \\
N_0 - N_1 &\leqq P_0 - P_1 \\
N_0 - N_1 - N_2 &\geqq P_0 - P_1 + P_2. \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

If all of the integers N_1 are finite for $i < r + 1$ the first $r + 1$ relations in (A) still hold.

Further details and extensions will be given in the Colloquiom Lectures by the author.

1. *Tonelli,* Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.
2. *Signorini,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 33 (1912) pp. 187—193. Here broken geodesics are used in the quest for a minimum.
3. *Birkhoff,* Dynamical Systems. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 9. Birkhoff's minimum and minimax methods are developed here.
4. *MM. Lusternik et Schnirelmann,* Topological Methods in Variational Problems. Research Institute of Mathematics and Mechanics Gosizdat Moscow (1930). Here a topological theory of critical points of functions is developed. Specific results in the calculus of variations are confined mostly to the problem of the closed geodesic on the image of the 2-sphere.
5. *Morse,* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 27 (1925), pp. 345—396.
6. *Morse,* Ibid vol. 30 (1928), pp. 213—274.
7. *Morse,* Ibid vol. 31 (1929), pp. 379—404.
8. *Morse,* Ibid vol. 32 (1930), pp. 599—631.
9. *Morse,* Ibid vol. 33 (1931), pp. 72—91.
10. *Morse,* Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 15 (1929), pp. 856—859. Extremal chords, and periodic extremals.
11. *Morse,* Annals of Mathematics, vol. 32 (1931), pp. 549—566.
12. *Morse,* Calculus of Variations. American Mathematical Society Colloquium Publications. Not yet published.
13. *Lefschetz,* Topology. American Mathematical Society Colloquium Publications.
14. *Eisenhart,* Riemannian Geometry.
15. *Osgood,* Funktionentheorie II.
16. *Poníncaré,* Liouville Journal 4th series, vol. 1 (1885) pp. 167—244. The equality in the case $n = 2$ was used by Poincaré.

Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und Zahlentheorie

Von Emmy Noether, Göttingen

1. Die Theorie der hyperkomplexen Systeme, der Algebren, hat in den letzten Jahren einen starken Aufschwung genommen; aber erst in allerneuester Zeit ist die Bedeutung dieser Theorie für kommutative Fragestellungen klar geworden. Über diese Bedeutung des Nichtkommutativen für das Kommutative möchte ich heute berichten: und zwar will ich das im einzelnen verfolgen an zwei klassischen, auf Gauss zurückgehenden Fragestellungen, dem Hauptgeschlechtssatz und dem eng damit verbundenen Normensatz. Diese Fragestellungen haben sich im Laufe der Zeit in ihrer Formulierung immer wieder gewandelt: bei Gauss treten sie auf als Abschluss seiner Theorie der quadratischen Formen; dann spielen sie eine wesentliche Rolle in der Charakterisierung der relativ zyklischen und abelschen Zahlkörper durch die Klassenkörpertheorie, und schliesslich lassen sie sich aussprechen als Sätze über Automorphismen und über das Zerfallen von Algebren, und diese letztere Formulierung gibt dann zugleich eine Übertragung der Sätze auf beliebige relativ galoissche Zahlkörper.

Mit dieser Skizze, die ich später ausführen werde, möchte ich zugleich das *Prinzip* der Anwendung des Nichtkommutativen auf das Kommutative erläutern: *Man sucht vermöge der Theorie der Algebren invariante und einfache Formulierungen für bekannte Tatsachen über quadratische Formen oder zyklische Körper zu gewinnen, d. h. solche Formulierungen, die nur von Struktureigenschaften der Algebren abhängen. Hat man einmal diese invarianten Formulierungen bewiesen* – und das ist in den oben angegebenen Beispielen der Fall – *so ist damit von selbst eine Übertragung dieser Tatsachen auf beliebige galoissche Körper gewonnen.*

2. Vor einer Einzelausführung möchte ich noch einen allgemeinen Überblick über die verschiedenen Methoden und die weiteren Resultate geben. Vorerst ist zu bemerken, dass die Hauptschwierigkeit in der Gewinnung der Formulierung für allgemeine galoissche Körper liegt, wozu ohne die hyperkomplexe Methode gar kein Ansatzpunkt vorhanden war; in den angeführten Beispielen ist der zugrunde liegende Übergang zum Nichtkommutativen gewonnen durch die *gleichzeitige Betrachtung von Körper und Gruppe* vermöge des „verschränkten Produkts“ und seiner Multiplikationskonstanten, der „Faktorensysteme“ (vgl. 3). Man erhält so eine einfache normale Algebra über dem Grundkörper und jede solche Algebra ist im wesentlichen so erzeugbar. Solche verschränkte Produkte sind zuerst von Dickson

betrachtet worden[1]), während sich die Theorie der Faktorensysteme durch Speiser, Schur, R. Brauer[2]) von ganz anderem Ausgangspunkt her entwickelt hatte, von der Frage der absolut irreduziblen Darstellungen. Erst durch die Verschmelzung beider Theorien liess sich ein genügend einfacher und weitreichender Aufbau erzielen, um kommutative Fragen damit angreifen zu können[3]).

Dabei ergeben sich zugleich auch für bekannte Tatsachen neue und durchsichtige Beweise: ich möchte hier auf einen bald in den Math. Ann. erscheinenden hyperkomplexen Beweis des Reziprozitätsgesetzes für zyklische Körper hinweisen, den H. Hasse gegeben hat[4]), vermöge einer invarianten Formulierung seines Normenrestsymbols, auf der Theorie des verschränkten Produkts beruhend. Und weiter auf eine hyperkomplexe Begründung der Klassenkörpertheorie im Kleinen, auf derselben Grundlage beruhend, die neuerdings C. Chevalley gegeben hat, wobei aber noch neue algebraische Sätze über Faktorensysteme zu entwickeln waren[5]). Zugleich muss ich aber doch einschränkend bemerken, dass die Methode der verschränkten Produkte allein allem Anschein nach *nicht* die volle Theorie der galoisschen Zahlkörper ergibt. Das folgt aus neuen noch unpublizierten Resultaten von Artin, die an den obigen Beweis von Hasse im Sinn des angegebenen Prinzips anschliessen, aber nur Anzahlgleichheiten an Stelle von vollen Isomorphiesätzen ergeben.

Methoden, die eine volle Isomorphie – allerdings Operatorisomorphie – ergeben, hat man nun schon im Algebraischen. Es handelt sich um die Fortführung von Ansätzen von A. Speiser[6]) und zwar um die Auffassung des galoischen Körpers als „Galoismodul", d. h. als eines Moduls nach dem Grundkörper, der die Substitutionen der galoisschen Gruppe als Operatoren gestattet. Und es besteht Operatorisomorphie zwischen Körper und Gruppenring (Gruppenalgebra) in dem Sinn, dass eindeutiges Entsprechen zwischen den Elementen statthat derart, dass Linearformen nach dem Grundkörper sich entsprechen, und dass den Substitutionen der galoisschen Gruppe im Körper die Multiplikation im Gruppenring zugeordnet ist. Diesen von mir aufge-

[1]) Vgl. sein Buch „Algebren und ihre Zahlentheorie", Zürich 1927, § 34.

[2]) Vgl. etwa *R. Brauer* „Untersuchungen über die arithmetischen Eigenschaften von Gruppen linearer Substitutionen", und die dort Anm. 2 angegebene Literatur, Math. Ztschr. 28 (1928).

[3]) Diesen Aufbau habe ich zuerst in einer Vorlesung Winter 1929/30 entwickelt, wiedergegeben in Kap. 2 von *H. Hasse* Theory of cyclic algebras, Transac, 134 (1932). Über das ganze in dem Vortrag behandelte Gebiet orientiert ein Bericht von *M. Deuring* über hyperkomplexe Zahlen und zahlentheoretische Anwendungen, der in der Sammlung „Ergebnisse der Mathematik" erscheinen soll.

[4]) *H. Hasse,* Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper (insbesondere Normenrestsymbol und Reziprozitätsgesetz). Math. Ann. 107 (1932/33).

[5]) *C. Chevalley,* Sur la théorie du symbole de restes normiques; wird im J. f. Math. 169 erscheinen.

[6]) *A. Speiser,* Gruppendeterminante und Körperdiskriminante. Math. Ann. 77 (1916).

stellten Satz[7]) hat M. Deuring bewiesen[8]), der darauf einen Beweis der galoisschen Theorie gegründet hat, wobei die Operatorisomorphie die Zuordnung von Gruppe und Körper realisiert. Weitergehende Struktursätze – ebenfalls von Deuring – laufen formalen Tatsachen der Artinschen L-Reihen parallel und ergeben einen strukturmässigen Zugang zu den Artinschen Führern. Diese Artinschen L-Reihen und Führer[9]), die mit allgemeinen Gruppencharakteren gebildet sind, stellen neben Speiser[6]) die erste Verbindung von Zahlentheorie und Darstellungstheorie dar, einen ersten Vorstoss über die abelschen Körper hinaus. Sie haben der ganzen Entwicklung einen starken Impuls gegeben, insbesondere hat sich die Theorie der Galoismoduln daran orientiert.

3. Ich möchte jetzt die an die Spitze gestellten Probleme, Normensatz und Hauptgeschlechtsatz im einzelnen verfolgen. Zuerst die *Definition des verschränkten Produkts:* Es sei K/k ein galoisscher Körper n-ten Grads, $\mathfrak{G}$ seine Gruppe. Das verschränkte Produkt bedeutet eine gleichzeitige Einbettung von K und $\mathfrak{G}$ in eine Algebra A derart, dass die Automorphismen von K innere werden. Es mögen $u_{S_1}, \ldots, u_{S_n}$ Symbole bedeuten, die den n Gruppenelementen entsprechen; dann setzt man A zuerst als Linearformenmodul vom Rang n nach K an:

(1) $A = u_{S_1}K + \ldots + u_{S_n}K$ (d. h. A besteht aus allen Linearformen $u_{S_1}a_1 + \ldots + u_{S_n}a_n$ mit a_i beliebig in K).

Vermöge der Forderung des inneren Automorphismus – erzeugt durch die u_S, allgemeiner $u_S K^*$[10]) – wird A zu einem Ring, also zu einer Algebra vom Rang n^2 über k. Die Forderung drückt sich nämlich aus durch

(2) $u_S^{-1} z u_S = z^S$[11]) oder $z u_S = u_S z^S$ für jedes z aus K.

(3) $u_S u_T = u_{ST}\, a_{S,T}$ mit $a_{S,T}$ in K^*

(4) $a_{ST,R}\, a_{S,T}^R = a_{S,TR}\, a_{T,R}$ (Assoziativgesetz aus $[u_S u_T]\, u_R = u_S\, [u_T u_R]$)

A heisst das verschränkte Produkt von K mit $\mathfrak{G}$ bei Faktorensystem $a_{S,\,T}$; man beweist, dass A eine einfache normale Algebra über k wird, also ein Matrizenring r-ten Grads D_r über der zugeordneten Divisionsalgebra D, und dass K maximaler kommutativer Unterkörper, also Zerfällungskörper wird (d. h. die Erweiterung des Koeffizientenbereichs k mit einem zu K isomorphen Körper ergibt eine *zerfallende* Algebra, einen vollen Matrizenring über dem Zentrum). Umgekehrt gibt es zu vor-

[7]) *E. Noether,* Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung, Satz 3, J. f. Math. 167 (1932) (der Beweis enthält eine Lücke).

[8]) *M. Deuring,* Galoissche Theorie und Darstellungstheorie. Math. Ann. 107 (1932).

[9]) *E. Artin,* Über eine neue Art von L-Reihen, Math. Sem. Hamburg 3 (1924). Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, ebenda, 8 (1931). Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper, J. f. M. 164 (1931).

[10]) K^* entsteht aus K durch Weglassung der Null; diese Bezeichnung wird allgemein benutzt.

[11]) z^S bedeutet wie üblich das durch die Substitution S aus z entstehende Element.

gegebener Divisionsalgebra D immer Matrizenringe D_r, die auf die angegebene Art als verschränktes Produkt erzeugbar sind.

Geht man von u_S zu $v_S = u_S c_S$ mit c_S in K^* über, was denselben Automorphismus erzeugt, so entstehen „assoziierte" Faktorensysteme.

(5) $\bar{a}_{S,T} = a_{S,T} c_S^T c_T / c_{ST}$.

Assoziierte Faktorensysteme werden in eine Klasse (a) zusammengefasst, ebenso fasst man alle zu A ähnlichen Algebren, d.h. alle D_r mit $r = 1, 2, \ldots$ in eine Klasse $\mathfrak{A}$ zusammen. *Die Klassen $\mathfrak{A}$ und (a) entsprechen sich ein-eindeutig: die Klassen mit festem Zerfällungskörper K bilden gegenüber direkter Produktbildung eine abelsche Gruppe, die isomorph ist dem gliedweisen Produkt der Klassen von Faktorensystemen. Einselement ist die zerfallende Algebrenklasse bezw. das System aller Transformationsgrössen $c_S^T c_T / c_{ST}$.* Es handelt sich um die von R. Brauer bemerkte Gruppe der Algebrenklassen.

4. Ich will jetzt durch *Spezialisierung* auf *zyklische Zerfällungskörper* auf den Zusammenhang mit dem *Normbegriff* kommen, und damit auf die Formulierung des verallgemeinerten *Normensatzes* nach dem zu Anfang auseinandergesetzten Prinzip. Ist Z zyklisch, S eine erzeugende Substitution seiner Gruppe – die zugehörige Algebra wird dann als zyklisch bezeichnet – so kann man den Potenzen von S die Potenzen von u entsprechen lassen, also

(1') $A = Z + uZ + \ldots + u^{n-1}Z$
(2') $zu = uz^S$
(3') $u^n = a$
(4') a liegt im Grundkörper k^*
(5') $\bar{a} = a.N(c)$, wenn $v = uc$ gesetzt.

Jedes Faktorensystem besteht also hier aus einem einzigen im Grundkörper gelegenen Element a – Bezeichnung $A = (a, Z)$–; die Einsklasse der Faktorensysteme ist durch die *Normen aus* Z^* gegeben, die Gruppe der Algebrenklassen wird isomorph der Faktorgruppe $k^*/N(Z^*)$. Eine zyklische Algebra (a, Z) zerfällt also dann und nur dann, wenn a Norm eines Elements aus Z. Dieser Zusammenhang zwischen Norm und Zerfallen gibt die Formulierung des „Normensatzes", nämlich den *Satz über die zerfallenden Algebren: Zerfällt eine Algebra an jeder Stelle, so zerfällt sie schlechthin.* Dabei ist die „Stelle", wie in der Zahlentheorie üblich, dadurch definiert, dass der Grundkörper k durch seine $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung $k_\mathfrak{p}$ ersetzt wird, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k (bezw. den endlichvielen unendlichen Stellen entsprechend, dass k und seine Konjugierten mit dem Körper der reellen Zahlen erweitert werden).

In der Tat ist darin der Normensatz für zyklische Körper enthalten. Denn für zyklische Algebren (a, Z) ist nach dem oben gesagten der Satz gleichbedeutend mit der Aussage: Ist a an jeder (endlichen oder unendlichen) Stelle $\mathfrak{p}$-adische Norm, so ist a Norm einer Zahl aus Z, oder ohne Übergang zum $\mathfrak{p}$-adischen: *Ist a Normenrest nach jedem Primideal $\mathfrak{p}$ aus k (und genügt gewissen Vorzeichenbedingungen), so ist a Norm einer Zahl aus Z.* Diese letztere Fassung ist aber der Normensatz, der in der Klassenkörpertheorie bewiesen wird, unter Benutzung der bekannten analytischen Hilfsmittel. Und der Beweis des allgemeinen Satzes über zerfallende Algebren lässt sich aus diesem zyklischen Spezialfall durch rein algebraisch-arithmetische Betrachtungen gewinnen[12]). Eine erste wichtige Folgerung hat Hasse gezogen: *Jede einfache normale Algebra über einem algebraischen Zahlkörper ist zyklisch.* Auf der Suche nach einem Beweis dieser lange vermuteten Tatsache entstand die allgemeine Formulierung.

5. Eine zweite Folgerung aus dem Satz über zerfallende Algebren – wieder mit rein algebraisch-arithmetischen Schlussweisen – ist der an die Spitze gestellte *Hauptgeschlechtssatz*[13]). Seine invariante Formulierung beruht auf der Tatsache, dass die das verschränkte Produkt definierenden Relationen (2) bis (5) rein multiplikativ sind, also sinnvoll bleiben, wenn K^* durch eine abelsche Gruppe $\mathfrak{J}$ ersetzt wird, die nur der Bedingung genügt, dass ihre Automorphismengruppe eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Untergruppe enthält. An Stelle von (1) tritt dann die „Erweiterung von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{J}$" im Sinne der Gruppentheorie. Nimmt man für $\mathfrak{J}$ die Gruppe aller Ideale aus K, so werden also die Faktorensysteme Systeme von Idealen; eine Klasseneinteilung in $\mathfrak{J}$ induziert eine Klasseneinteilung für die Faktorensysteme, und zwar wird das im allgemeinen eine feinere Idealklasseneinteilung, als die ursprüngliche. Denn die Forderung, dass die Multiplikation der u_S mit (absoluten) Idealklassen eindeutig ist, sagt nur aus, dass die Transformationsgrössen $c_S^T c_T / c_{ST}$ – die Einsklasse der Elementfaktorensysteme – in der Einsklasse der Idealfaktorensysteme liegen. Tatsächlich genügt aber, wie die Spezialisierung auf die bekannten Fälle zeigt, schon eine etwas weniger feine Einteilung. Ich definiere: *In die Einsklasse der Faktorensysteme werden diejenigen Elemente $a_{S,\,T}$ gerechnet, die an allen (endlichen und unendlichen) Verzweigungsstellen von K zerfallende Algebren erzeugen.* Die so entstehende Erweiterung von $\mathfrak{G}$ werde mit $\mathfrak{G}^*$ bezeichnet; $(\mathfrak{c})$ bedeute die absolute Idealklasse von $\mathfrak{c}$. Dann lautet die

Invariante Formulierung des Hauptgeschlechtssatzes: Entsteht bei der so definierten Klasseneinteilung durch die Substitution $v_S = u_S(\mathfrak{c}_S)$ ein Automorphismus von $\mathfrak{G}^*$ – alle diese $(\mathfrak{c}_S)$ bilden das Hauptgeschlecht –, so ist der Automorphismus ein innerer und wird durch eine Idealklasse $(\mathfrak{b})$ erzeugt.

Die bekannten Spezialfälle folgen aus einer gleichwertigen, etwas mehr expliziten Formulierung: *Gehören die aus den Idealklassen $(\mathfrak{c}_S)$ gebildeten Transformations-*

[12]) *R. Brauer, H. Hasse, E. Noether,* Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren. J. f. M. 167 (1932).

[13]) Der Beweis soll in den Math. Ann. erscheinen.

grössen $(\mathfrak{c}_S^T)\,(\mathfrak{c}_T)/(\mathfrak{c}_{ST})$ *der Einsidealklasse der Faktorensysteme an, so gibt es eine Idealklasse* $(\mathfrak{b})$, *derart, dass die* $(\mathfrak{c}_S)$ *symbolische* $(1-S)$*te Potenzen werden:* $(\mathfrak{c}_S) = (\mathfrak{b}) \,/\, (\mathfrak{b}^S)$ *für alle* S *aus* $\mathfrak{S}$. Denn die Voraussetzung drückt gerade die Automorphismeneigenschaft aus; die Tatsache, dass dieser ein innerer, drückt sich aus durch $v_S = (\mathfrak{b})^{-1}$ $u_S(\mathfrak{b}) = u_S(\mathfrak{b})^{1-S} = u_S(\mathfrak{c}_S)$.

Die Spezialisierung auf den zyklischen Fall ergibt also (unter Beachtung der Normierung): Liegt $N([\mathfrak{c}])$ in der Einsidealklasse der Faktorensysteme, so wird $(\mathfrak{c})$ symbolische $(1-S)$te Potenz: $(\mathfrak{c}) = (\mathfrak{b})^{1-S}$.

6. Um von hier aus auf die bekannte Fassung für zyklische Körper und quadratische Formen zu gelangen, bemerke ich vorerst, dass der Satz für die vollen Idealklassen ausgesprochen ist, sein Inhalt aber derselbe bleibt, wenn man sich wie üblich auf zu den Verzweigungsstellen prime Ideale beschränkt.

Damit geht aber das hier definierte Hauptgeschlecht für quadratische Körper in das Gausssche über; denn den Idealklassen entsprechen die quadratischen Formen, den Normen der Klassen die durch die Formen darstellbaren Zahlen. Dass die Einsklasse die an den Verzweigungsstellen von K zerfallenden Algebren erzeugt, heisst also dass diese darstellbaren Zahlen an den Verzweigungsstellen quadratische Reste werden; die zugehörigen Formen besitzen somit den Totalcharakter der Hauptform, bilden also das Gausssche Hauptgeschlecht. Dass die $(1-S)$te symbolische Potenz in die Duplikation übergeht, ist bekannt.

Für zyklische Körper geht die Fassung in die folgende über: Das Hauptgeschlecht besteht aus allen Idealklassen, deren Normen an den (endlichen und unendlichen) Verzweigungsstellen Normenreste werden. Das ist aber bekanntlich gleichbedeutend mit „Normenrest nach dem Führer", und somit entsteht der übliche Satz als Spezialisierung.

Übrigens kann man auch im allgemeinen Fall beliebiger galoisscher Körper einen nur aus den Verzweigungsstellen zusammengesetzten Führer einführen derart, dass bei Normierung der Faktorensysteme für jede dieser Stellen, der Strahl nur Elemente der Einsklasse enthält.

Hier entsteht die Frage nach dem Zusammenhang mit den im Überblick 2 erwähnten Artinschen Führern, die ja aus denselben Primidealen zusammengesetzt sind; und damit die Frage nach dem Zusammenhang mit der Theorie der Galoismoduln, der zweiten hyperkomplexen Methode. Wie weit diese beiden Methoden reichen werden, muss erst die Zukunft zeigen.

Fastperiodische Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Von Harald Bohr, Kopenhagen

In der analytischen Zahlentheorie begegnet man einer Klasse von unendlichen Reihen, welche uns in verschiedener Hinsicht ein interessantes und eigenartiges Beispielmaterial geliefert haben, und welche deshalb sowohl für den allgemeinen Aufbau der Theorie der analytischen Funktionen, als auch für die Entwicklung der Lehre von den unendlichen Reihen eine bedeutsame Rolle gespielt haben. Ich denke an die sogenannten *Dirichletschen Reihen.* Unter einer Dirichletschen Reihe im engeren Sinne versteht man bekanntlich eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^s} = \sum_1^\infty a_n\, e^{-\log n \cdot s},$$

wo $s = \sigma + i\, t$ die komplexe unabhängige Veränderliche bedeutet. Das Konvergenzgebiet einer solchen Reihe ist eine rechte Halbebene begrenzt von einer vertikalen Geraden $\sigma = a$, und innerhalb dieser Halbebene stellt die Reihe eine analytische Funktion $f(s)$ dar. Als Hauptvertreter dieses Reihentypus ist die berühmte Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ anzusehen, welche die Primzahlentheorie beherrscht.

Die Theorie der Dirichletschen Reihen ist bekanntlich durch die Arbeit vieler Forscher eingehend untersucht und weit ausgedehnt. Eine Frage aber war durch längere Zeit nur sehr ungenügend aufgeklärt, nämlich die Frage, *welche Funktionen $f(s)$ sich in Dirichletsche Reihen entwickeln lassen*, oder, was damit eng zusammenhängt, die Frage nach einer genauen Charakterisierung der asymptotischen Eigenschaften einer durch eine Dirichletsche Reihe dargestellten Funktion. Es ist diese Frage, welche den Ausgangspunkt für die Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen gebildet hat. Im Laufe der Untersuchung zeigte es sich aber – wie es so oft bei der Behandlung von Fragen allgemeinerer Art geschieht – dass die Frage zunächst allzu eng gestellt war, und dass eine wesentlich freiere und weitergehende Problemstellung nötig war, um eine einfache und befriedigende Lösung des Problems zu ermöglichen.

In einer gewöhnlichen Dirichletschen Reihe $\sum a_n\, e^{-\log n \cdot s}$ ist jedes einzelne Glied von der Form $a\, e^{\lambda s}$ mit einem reellen λ und ist somit eine periodische Funktion von s mit einer rein imaginären Periode $\frac{2\pi}{\lambda} i$. Die Forderung, dass die λ' s bestimmte, im voraus gegebene Grössen sein sollten, in unserem Fall gerade die Zahlen $-\log n$, musste man aber zunächst ganz fallen lassen und sich das allgemeine Problem stellen, welche Funktionen $f(s)$ sich in eine Reihe der Form

$$\Sigma\, a_n\, e^{\lambda_n s}$$

entwickeln lassen, wobei die λ'*s völlig beliebige reelle Zahlen sind.*

Reihen der allgemeinen Form $\Sigma\, a_n\, e^{\lambda_n s}$ sind ja schon früher unter dem Namen „allgemeine Dirichletsche Reihen" eingehend untersucht und ihre Analogie mit den Dirichletschen Reihen im engeren Sinne klargelegt. Dabei aber war über die Exponenten λ_n immer vorausgesetzt, dass sie eine monotone ins Unendliche gehende Zahlenfolge bilden, oder jedenfalls, dass sie auf der λ-Achse diskret liegen, also sich nur gegen $+\infty$ und $-\infty$ häufen; im letzten Falle, wo beliebig grosse Exponenten beiderlei Vorzeichen auftreten, ist das Konvergenzgebiet der Reihe nicht mehr eine Halbebene, sondern ein von zwei vertikalen Geraden $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$ begrenzter Streifen. Entscheidend für die Theorie der fastperiodischen Funktionen ist aber, wie gesagt, das *Fallenlassen jedweder Einschränkung für die Exponentenfolge* λ_n, ausser dass die λ' s reell sind. Charakteristisch für die Theorie der Dirichletreihen fastperiodischer Funktionen, im Gegensatze zu der gewöhnlichen Theorie der Dirichletschen Reihen, ist ferner, dass wir nicht von einer beliebig hingeschriebenen Reihe ausgehen, sondern von einer *Funktion, welche die Reihe erzeugt.*

Um gleich hier am Anfang des Vortrages das Hauptresultat der Theorie kurz anzudeuten, sei erwähnt, dass es für die sinngemässe Auflösbarkeit einer in einem Streifen $\alpha < \sigma < \beta$ analytischen Funktion $f(s)$ in eine Dirichletsche Reihe $\Sigma\, a_n\, e^{\lambda_n s}$ notwendig und hinreichend ist, dass sie in vertikaler Richtung eine gewisse Fastperidiozität aufweist. Den hierbei auftretenden, vorläufig ohne nähere Definition dahingestellten Worten „Auflösbarkeit" und „Fastperiodizität" werden wir erst später eine genau präzisierte Bedeutung erteilen.

Zum Abschluss dieser einleitenden orientierenden Bemerkungen werde ich noch dem oben angeführten allgemeinen Problem eine unwesentlich geänderte Formulierung geben, welche aber für gewisse hierhergehörige Untersuchungen etwas bequemer ist, und die vielleicht manchem näher liegt. Diese neue Formulierung wird einfach dadurch erhalten, dass wir die Variabeltransformation $s = \log z$ $(z = e^s)$ ausführen. Hierdurch geht ein vertikaler Streifen der s-Ebene in einen konzentrischen Kreisring um den Nullpunkt der z-Ebene über, jedoch nicht in einen Kreisring der schlichten z-Ebene, sondern in einen unendlichblättrigen Kreisring der Riemannschen Fläche des Logarithmus. Unsere Frage lautet dann: Wie muss eine in einem solchen unendlichblättrigen Kreisring analytische Funktion $\varphi(z)$ beschaffen sein, damit sie im ganzen unendlichblättrigen Kreisringe aus abzählbar vielen der Potenzen z^λ additiv aufgebaut werden kann, d. h. eine sinnvolle Darstellung der Form

$$\Sigma\, a_n\, z^{\lambda_n}$$

zulässt. In dieser Form erscheint unsere Fragestellung als eine natürliche Generalisation der klassischen elementaren Frage nach der Auflösung einer Funktion in eine gewöhnliche Laurentreihe $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$, wo die Exponenten von vorneherein und zwar als ganze Zahlen vorgeschrieben sind. Die Antwort auf unsere Frage in der neuen Formulierung lautet, dass die Funktion $\varphi(z)$ ein fastperiodisches Verhalten bei unendlich oft wiederholtem Umlauf um den Windungspunkt $z = 0$ aufweisen soll; in der Tat entspricht ja einer vertikalen Bewegung in der s-Ebene ein solcher kreisförmiger Umlauf des Anfangspunktes der z-Ebene.

Bevor ich dazu übergehe, das erwähnte Problem für analytische Funktionen $f(s)$ genau zu formulieren und seine Lösung zugleich mit einer kurzen Skizze einiger der wesentlichsten Ergebnisse der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu geben, muss ich zunächst in aller Kürze einige Züge aus der *Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen* t besprechen, welche die Grundlage bildet, worauf die Theorie für den Fall einer komplexen Veränderlichen sich aufbaut.

Es sei $F(t) = U(t) + i\,V(t)$ eine für $-\infty < t < \infty$ gegebene stetige Funktion der reellen Veränderlichen t. Als „reine Schwingung" bezeichnen wir jede Funktion $a\,e^{i\lambda t}$ mit komplexem a und reellem λ. Wir stellen uns, ganz analog dem vorangehenden, die folgende Frage: *Welche Funktionen $F(t)$ lassen sich in abzählbar viele reine Schwingungen auflösen*, und nunmehr wollen wir genau erklären, in welchem Sinne wir das Wort „auflösen" gebrauchen werden. Zunächst ist klar, dass jede Funktion $S(t)$, welche als Summe von endlich vielen Schwingungen

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n\, e^{i\lambda_n t}$$

darstellbar ist, als auflösbar bezeichnet werden soll. Wenn wir aber nur solche endliche Summen als auflösbar betrachten wollten, hätten wir uns gewiss eine viel zu enge Beschränkung auferlegt; in der Tat hätten wir uns dann von vornherein davon ausgeschlossen, auch solche Operationen mit unseren Funktionen vorzunehmen, welche auf Grenzübergängen beruhen. Wir müssen also auch derartige Funktionen als auflösbar betrachten, welche aus abzählbar unendlich vielen Schwingungen zusammengesetzt sind, d. h. wir müssen auch Funktionen $F(t)$ heranziehen, welche als Grenzfunktionen einer Folge von endlichen Summen

$$F(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t)$$

auftreten. Nun, in welchem Sinne aber soll hier der Begriff der Grenzfunktion aufgefasst werden? In diesem Vortrage, wo ich der Kürze halber von den verschiedenen interessanten Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen ganz absehen muss und mich auf den ursprünglichen eigentlichen Begriff der Fastperiodizität beschränken muss, soll $F(t)$ nur dann als Grenzfunktion einer Folge von Summen $S_N(t)$ bezeichnet werden, wenn der Grenzübergang im kräftigsten, aber auch für unsere Problemstellung im wichtigsten Sinne stattfindet, nämlich wenn er *gleichmässig im ganzen unendlichen Intervalle* $-\infty < t < \infty$ gilt. Die Menge $\{S(t)\}$ aller endlichen Summen $S(t)$ erweitern wir also dadurch, dass wir alle Grenzfunktionen $F(t)$ in dem soeben genannten Sinne hinzufügen. Die so entstandene Funktionsmenge, die wir als die „abgeschlossene Hülle" der Menge $\{S(t)\}$ charakterisieren können, werden wir mit $H\{S(t)\}$ bezeichnen, und eine Funktion $F(t)$ soll dann und nur dann als in reine Schwingungen auflösbar bezeichnet werden, wenn sie dieser abgeschlossenen Hülle $H\{S(t)\}$ angehört.

Ein Hauptresultat der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen besagt nun, *dass die Klasse dieser in reine Schwingungen auflösbaren Funktionen $F(t)$ in einfacher Weise durch Struktureigenschaften genau charakterisiert werden kann,* nämlich dass die genannte Funktionenmenge $H\{S(t)\}$ mit der Klasse der *fastperiodischen* Funktionen identisch ist,

$$\boxed{H\{S(t)\} = \{\text{f. p. Funkt.}\}}$$

Hierbei ist die Definition der Fastperiodizität eine recht einfache Erweiterung des Begriffes der reinen Periodizität, und zwar können wir sie etwa in der folgenden Weise erklären: Während bei einer reinperiodischen Funktion $F(t)$ eine Zahl p, die Periode, existiert, für welche $F(t+p) - F(t) = 0$ für alle t, haben wir es in dem verallgemeinerten Fall statt mit genauen Perioden nur mit „Fastperioden", den sogenannten *Verschiebungszahlen,* zu tun. Hierbei soll $\tau = \tau(\varepsilon)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $F(t)$ heissen, wenn die Ungleichung

$$|F(t+\tau) - F(t)| \leqq \varepsilon$$

für alle t besteht. Es wird nun von einer stetigen Funktion $F(t)$, damit sie fastperiodisch genannt werden soll, zunächst verlangt, dass sie bei jedem ε solche Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$, darunter beliebig grosse, besitzen soll. Es kommt aber noch eine, und zwar sehr wesentliche Bedingung hinzu, welche die Menge aller zu einem festen ε gehörigen Verschiebungszahlen $\tau(\varepsilon)$ betrifft, und welche besagt, dass diese Menge $\{\tau(\varepsilon)\}$ in dem Sinne *relativ dicht* auf der Zahlenachse liegen soll, dass zwischen den Zahlen $\tau(\varepsilon)$ nirgends beliebig grosse Lücken vorkommen dürfen. Im speziellen reinperiodischen Fall scheidet die Aufstellung einer solchen Bedingung natürlich aus; in der Tat ist sie ja hier von selbst erfüllt, weil zugleich mit p auch alle Multipla np Perioden sind. In dem verallgemeinerten fastperiodischen Fall aber, wo wir es nur mit Verschiebungszahlen $\tau\ (\varepsilon)$ zu tun haben, bedeutet sie eine wesentliche Einschränkung des zu betrachtenden Funktionenbereiches — und zwar eine Einschränkung, welche uns erst den „richtigen" Funktionenbereich ergibt und damit die ganze Theorie ermöglicht — was damit zusammenhängt, dass das Multiplum eines $\tau\ (\varepsilon)$ natürlich im allgemeinen nicht wieder ein $\tau\ (\varepsilon)$ liefert.

Obwohl ich in diesem Bericht sonst nirgends auf Beweise eingehen kann, möchte ich jedoch hier einige Bemerkungen über die beim Beweise des obigen Hauptsatzes zu benutzende Methode anführen, auch weil ich dadurch Gelegenheit haben werde, den für die ganze Theorie fundamentalen Begriff der *Fourierreihe* einer fastperiodischen Funktion kurz zu erörtern.

Was die eine Hälfte unseres Hauptsatzes betrifft, welche besagt, dass jede in Schwingungen auflösbare Funktion fastperiodisch ist, bietet ihr Beweis keine grosse Schwierigkeiten, und zwar ist der einzige nicht triviale Satz, welcher dabei zu beweisen ist, der, dass die Summe zweier fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch ausfällt.

Die ganze Schwierigkeit liegt in dem Beweise der anderen Hälfte des Satzes, wo es sich darum handelt zu zeigen, dass jede fastperiodische Funktion $F\ (t)$ in Schwingungen auflösbar ist. Hierzu wird zunächst der fastperiodischen Funktion $F\ (t)$ eine gewisse unendliche Reihe der Form $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ als ihre Fourierreihe zugeordnet,

$$F\ (t) \sim \Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$$

und zwar durch das folgende Verfahren. Ausgehend von der evidenten Relation

$$M\left\{e^{i\lambda t}\right\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \neq 0 \\ 1 \text{ für } \lambda = 0 \end{cases}$$

wo $M\{\ldots\}$ den Mittelwert über das ganze unendliche t-Intervall $\lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\ldots dt$ bezeichnet, liegt es nahe, bei einem beliebigen festen reellen λ den Mittelwert

$$a\ (\lambda) = M\left\{F\ (t)\ e^{-i\lambda t}\right\}$$

zu bilden. Heuristisch gesprochen lässt sich dieser Prozess so interpretieren: Durch die Mittelwertbildung $M\{F\ (t)\ e^{-i\lambda t}\}$ wird an die Funktion $F\ (t)$ die Frage gerichtet, ob sie die Schwingung $e^{i\lambda t}$ enthält oder nicht; wenn dieser Mittelwert $a\ (\lambda)$ gleich Null ausfällt, bedeutet es, dass die Funktion $F\ (t)$ unsere Frage verneinend beantwortet; wenn aber, für ein gewisses λ, die Grösse $a\ (\lambda)$ von Null verschieden ist, bedeutet es, dass die Funktion zugibt, die Schwingung $e^{i\lambda t}$ zu enthalten und zwar gerade mit dem Koeffizienten $a\ (\lambda)$. Nun haben wir zunächst zu bemerken, dass die Frage tatsächlich für jedes λ an die Funktion $F\ (t)$ gestellt werden kann, d. h. dass der obige Mittelwert $M\{F(t)\,e^{-i\lambda t}\}$ für jedes λ existiert; dies ist keineswegs von vornherein evident (weil es sich um Mittelwertbildung über ein unendliches Intervall handelt), lässt sich aber unschwer aus der vorausgesetzten Fastperiodizität der Funktion $F(t)$ folgern. Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung ergibt sich nun weiter das wichtige Resultat, dass die Funktion $F(t)$ die gestellte Frage „fast immer" verneinend beantwortet, d. h. dass der Mittelwert $a(\lambda)$ immer gleich Null ausfällt bis auf höchstens *abzählbar viele* Werte von λ; diese abzählbar vielen, für die Funktion charakteristischen Werte von λ bezeichnen wir in irgendeiner Reihenfolge mit $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$, und sie sind die Fourierexponenten unserer Funktion, während die Fourierkoeffizienten natürlich die zugehörigen (von Null verschiedenen) Mittelwerte sind, also $A_n = a(\Lambda_n)$.

Durch die Aufstellung der Fourierreihe sind aber die Schwierigkeiten beim Beweise der Auflösbarkeit von $F(t)$ keineswegs überwunden, im Gegenteil, sie fangen erst jetzt an. Was durch die Bildung der Fourierreihe von $F(t)$ erreicht ist, lässt sich — immer heuristisch gesprochen — etwa so ausdrücken, dass wir von der Funktion denjenigen Teil abgespaltet haben, welcher überhaupt in reine Schwingungen auflösbar ist, während wir vorläufig keineswegs wissen können, ob die Funktion dabei vollständig aufgelöst wird, oder aber ob ein unauflösbarer Rest zurückbleibt. Dass dies letzte nicht der Fall ist, dass also die Funktion durch das angegebene Verfahren restlos aufgelöst wird, ist der Inhalt des sogenannten Fundamentalsatzes der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Dieser lässt sich in verschiedener Form aussprechen. Eine besonders prägnante Form ist vielleicht der *Eindeutigkeitssatz*, welcher besagt, dass eine fastperiodische Funktion durch ihre Fourierreihe eindeutig gekennzeichnet ist, dass also zu zwei verschiedenen fastperiodischen Funktionen zwei verschiedene Fourierreihen gehören.

Durch den Fundamentalsatz ist der zuerst aufgestellte Hauptsatz, der sogenannte *Approximationssatz*, nach welchem jede fastperiodische Funktion $F(t)$ gleichmässig durch endliche Summen reiner Schwingungen angenähert werden kann, noch nicht dargetan. Sein Beweis lässt sich aber aus dem Fundamentalsatze ohne allzu grosse Mühe ableiten. Ein besonders einfaches Verfahren hierfür hat *Weyl* in Zusammenhang mit seinem interessanten Nachweis der nahen Beziehung der Theorie der fastperiodischen Funktionen zur Theorie der Integralgleichungen oder vielmehr Mittelwertgleichungen angegeben. Ein anderes sehr einfaches Verfahren war schon früher von *Bochner*, und zwar in Anknüpfung an den ursprünglichen Beweis des Vortragenden, welcher auf der Heranziehung von Funktionen von unendlich vielen Variablen beruht, gegeben. Dies *Bochner*sche Verfahren zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass es eine elegante und sinngemässe Verallgemeinerung der klassischen *Fejér*-Summierung von Fourierreihen reinperiodischer Funktionen auf den fastperiodischen Fall darstellt.

Nach diesem kurzen, für das Verständnis des folgenden benötigten Resumé einiger der Ergebnisse aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen greifen wir nunmehr unser eigentliches Thema, die *Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* an.

Es sei $f(s) = f(\sigma + i\,t)$ eine in einem vertikalen Streifen $\alpha < \sigma < \beta$, den wir kurz mit (α, β) bezeichnen, überall reguläre analytische Funktion. Als „reine Schwingung" bezeichnen wir hier jede Funktion $a\, e^{\lambda s} = a\, e^{\lambda(\sigma + i t)}$ mit reellem λ, also eine ganze Transzendente, die periodisch ist mit einer vertikalen, d. h. rein imaginären Periode. Ganz analog der Problemstellung im Falle einer reellen Veränderlichen t stellen wir uns hier die folgende Frage: *Wie muss die Funktion $f(s)$ beschaffen sein, damit sie im ganzen unendlichen Streifen (α, β) in reine Schwingungen aufgelöst werden kann*, und zwar soll darunter verstanden werden, dass $f(s)$ entweder einfach als endliche Summe

$$S(s) = \sum_{1}^{N} a_n\, e^{\lambda_n s}$$

darstellbar ist, oder gleichmässig im ganzen Streifen (α, β) durch solche endliche Summen $S(s)$ angenähert werden kann, m. a. W. dass $f(s)$ der durch gleichmässigen Grenzübergang abgeschlossenen Hülle $H\{S(s)\}$ angehört. Um gewisse in der Natur der Sache liegende, bei Annäherung einer der beiden Begrenzungsgeraden $\sigma = \alpha$ und $\sigma = \beta$ auftretende Komplikationen zu umgehen, wird es im folgenden bequem sein, auch die Terminologie einzuführen, dass eine in (α, β) analytische Funktion $f(s)$ „in $[\alpha, \beta]$" in Schwingungen auflösbar ist, indem darunter einfach verstanden werden soll, dass sie in jedem Teilstreifen $(\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon)$ auflösbar ist. (Überhaupt werden wir eckige Klammern in diesem Sinne gebrauchen.) Wir sprechen sofort den Hauptsatz der Theorie aus, welcher besagt, *dass es für die Auflösbarkeit in reine Schwingungen von einer analytischen Funktion $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ notwendig und hinreichend ist, dass sie in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch* ist, also

$$\boxed{H\{S(s)\} = \{f.\,p.\,\mathit{Funkt.}\}}$$

Hierbei ist die Definition der Fastperiodizität von $f(s)$ in einem Streifen (α, β) insofern völlig analog der Definition im Falle einer reellen Veränderlichen, dass auch jetzt verlangt wird, dass die Funktion bei jedem ε eine relativ dichte Menge von (vertikalen) Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ besitzen soll, wobei die Definition einer Verschiebungszahl $\tau(\varepsilon)$ im vorliegenden komplexen Falle so lautet, dass die Ungleichung

$$|f(s + i\,\tau) - f(s)| \leq \varepsilon$$

für alle s des ganzen Streifens (α, β) bestehen soll.

In dieser Definition der Fastperiodizität von $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ ist offenbar enthalten, dass $f(s) = f(\sigma + i t)$ auf jeder festen vertikalen Geraden des Streifens eine fastperiodische Funktion der reellen Veränderlichen t ist; darüber hinaus wird aber eine *Gleichartigkeit* der Fastperiodizität auf den kontinuierlich vielen Geraden des Streifens verlangt. Die sich aufdrängende Frage, ob es nötig ist, diese Gleichartigkeit der Fastperiodizität explizite zu fordern — oder aber, ob sie bei einer analytischen Funktion von selbst vorhanden ist — ist keine ganz leichte. Sie ist dahin zu beantworten, dass es tatsächlich analytische Funktionen gibt, welche auf jeder einzelnen Geraden eines Streifens fastperiodisch sind, ohne auf den verschiedenen Geraden gleichartig fastperiodisch zu sein; eine eingehende Untersuchung der Klasse dieser ganz eigenartigen Funktionen wird von dem dänischen Mathematiker *Richard Petersen* in einer demnächst erscheinenden Arbeit gegeben.

Kehren wir aber zu den eigentlichen fastperiodischen Funktionen $f(s)$ zurück. Bei dem Aufbau der Theorie dieser Funktionen ist es an und für sich eines der Hauptprobleme zu untersuchen, wie tiefgehend die Analogie zwischen den reinperiodischen und den fastperiodischen Funktionen ist, oder vielmehr inwiefern und inwieweit Eigenschaften, die den reinperiodischen Funktionen zukommen, beim Übergang zu der allgemeinen Klasse der fastperiodischen Funktionen erhalten bleiben oder verloren gehen. Betrachten wir z. B. einen Satz aus der Theorie der reinperiodischen Funktionen wie den folgenden, dass eine in (α, β) analytische Funktion $f(s)$, welche nur auf einer einzigen Geraden des Streifens periodisch ist, von selbst im ganzen Streifen periodisch sein muss. Unmittelbar lässt sich dieser Satz gewiss nicht auf fastperiodische Funktionen übertragen; denn nach der obigen Bemerkung braucht eine Funktion $f(s)$ ja nicht einmal dann in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch zu sein, wenn sie auf jeder Geraden des Streifens fastperiodisch ist. Trotzdem aber lässt sich der Satz in geeigneter Form überführen, und zwar in der folgenden: Eine in (α, β) analytische Funktion, von der nur bekannt ist, dass sie auf einer einzigen Geraden $\sigma = \sigma_0$ fastperiodisch ist, wird immer im ganzen Streifen $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch sein, falls sie nur in $[\alpha, \beta]$ beschränkt bleibt; und diese hinzukommende Forderung der Beschränktheit ist keine künstliche, denn umgekehrt gilt es, wie leicht zu zeigen, dass jede in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion von selbst in $[\alpha, \beta]$ beschränkt bleiben muss.

Der soeben angegebene, mehr als Beispiel angeführte Satz ist übrigens deshalb bequem zur Verfügung zu haben, weil er offenbar erlaubt, fertige Sätze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen direkt auf komplexe Variable zu übertragen ohne nochmals auf Beweise einzugehen. So beweist man z. B. mit seiner Hilfe sofort solche Sätze wie die, dass die Summe und das Produkt zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischer Funktionen wieder in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch sind. Fügen wir beiläufig hinzu, dass die Verhältnisse bei der *Division* fastperiodischer Funktionen einer komplexen Veränderlichen besonders angenehm liegen. In der Tat gilt hier der Satz, dass der Quotient $\frac{g(s)}{h(s)}$ zweier in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktionen wiederum in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ausfällt, wenn er nur der selbstverständlichen Forderung genügt, dass er in (α, β) überall regulär ist; es braucht also nicht einmal angenommen zu werden, dass der Nenner $h(s)$ im ganzen Streifen von Null verschieden ist; er darf sehr wohl Nullstellen besitzen, wenn nur der Zähler $g(s)$ in denselben Punkten verschwindet (und zwar mindestens von derselben Multiplizität). Dieser Satz lässt sich als eine Verallgemeinerung eines der schönen Resultate von *Ritt* über Exponentialpolynome auffassen.

Wenden wir uns aber nunmehr wieder der Haupteigenschaft der fastperiodischen Funktionen $f(s)$ zu, nämlich ihrer in dem oben aufgestellten Hauptsatze dargelegten Auflösbarkeit in reine Schwingungen $a\, e^{\lambda s}$. Der Beweis dieser Auflösbarkeit sowie die tatsächliche Auflösung einer gegebenen fastperiodischen Funktion $f(s)$ geschieht mit Hilfe des Begriffes der *zu $f(s)$ gehörigen Dirichletschen Reihe.* Ebenso wie jeder fastperiodischen Funktion $F(t)$ der reellen Veränderlichen t eine Fourierreihe $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n t}$ zugeordnet wird, ordnen wir jeder in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s)$ eine unendliche Reihe der Form

$$\Sigma A_n e^{\Lambda_n s} = \Sigma A_n e^{\Lambda_n(\sigma + it)}$$

als ihre „Dirichletsche Reihe" zu, und zwar durch das folgende Verfahren. Auf jeder festen vertikalen Geraden des Streifens ist $f(\sigma + it) = F_\sigma(t)$ fastperiodisch in t und hat also eine Fourierreihe

$$F_\sigma(t) \sim \Sigma A_n^{(\sigma)} e^{i\Lambda_n^{(\sigma)} t}.$$

Aus der Analytizität der Funktion $f(s)$ lässt sich nun leicht folgern, dass die Fourierreihen auf den kontinuierlich vielen vertikalen Geraden des Streifens sich formal zu einer einzigen Entwicklung der Form

$$\Sigma A_n e^{\Lambda_n \sigma} \cdot e^{i\Lambda_n t} = \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$$

zusammenschliessen, d. h. die obigen Exponenten $\Lambda_n^{(\sigma)}$ sind von σ unabhängig, und die zugehörigen Koeffizienten $A_n^{(\sigma)}$ hängen in der „richtigen" Weise von σ ab, nämlich $A_n^{(\sigma)} = A_n e^{\Lambda_n \sigma}$, wo A_n eine von σ unanhängige Konstante bedeutet. Es ist die so entstandene Reihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, welche wir als die Dirichletentwicklung von $f(s)$ in $[\alpha, \beta]$ bezeichnen.

Im Spezialfall einer reinperiodischen Funktion $f(s)$ (etwa mit der Periode $2\pi i$) geht unsere Dirichletentwicklung in die gewöhnliche Laurententwicklung $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{ns}$ der Funktion $f(s)$ über.

Aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer reellen Veränderlichen überträgt sich sofort der *Eindeutigkeitssatz,* welcher hier besagt, dass zwei verschiedene in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktionen zwei verschiedene Dirichletentwicklungen besitzen, sowie auch der obige Hauptsatz, der *Approximationssatz*, z. B. in der Form, dass die Dirichletentwicklung $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ in dem früher erwähnten *Fejér-Bochner*schen Sinne gleichmässig summierbar mit der Summe $f(s)$ ist.

Bei dem weiteren Aufbau der Theorie wird man natürlich dazu geführt, den speziellen Fall, wo die Dirichletentwicklung *lauter positive* (*oder lauter negative*) *Exponenten* Λ_n besitzt, besonders zu untersuchen. Die Analogie mit dem reinperiodischen Spezialfall, wo wir es mit einer üblichen Potenzreihe in e^s zu tun haben, zeigt sich hier so weitgehend zu sein, wie man es nur hoffen durfte. Es gilt nämlich ganz allgemein der Satz, dass eine in $[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ mit lauter positiven (negativen) Exponenten Λ_n immer *über die ganze linke* (*rechte*) *Halbebene analytisch fortsetzbar* ist, und eine in dieser ganzen Halbebene fastperiodische Funktion liefert, welche für $\sigma \to -\infty$ $(\sigma \to +\infty)$ gleichmässig in t gegen Null strebt. Dieser Satz führt uns sofort zur Frage nach der *Laurenttrennung* einer beliebigen in $[\alpha, \beta]$ fastperiodischen Funktion $f(s) \sim \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ in zwei einfachere Bestandteile $f_1(s)$ und $f_2(s)$, die in den ganzen Halbebenen $[-\infty, \beta]$ bezw. $[\alpha, +\infty]$ analytisch und fastperiodisch sind. In der Tat könnte es nach dem erwähnten Satze zunächst erscheinen, als ob die klassische Laurenttrennung einer reinperiodischen Funktion unmittelbar auf den allgemeinen fastperiodischen Fall übertragbar wäre und zwar einfach dadurch zu erhalten wäre, dass man die beiden Teilreihen

$$\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s} \text{ und } \sum_{\Lambda_n \leq 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

mit lauter positiven, bezw. negativen Exponenten bildet, welche dann je für sich fastperiodische Funktionen $f_1(s)$ und $f_2(s)$ darstellen würden, von denen $f_1(s)$ nach links, $f_2(s)$ nach rechts analytisch fortsetzbar wäre. Die Zulässigkeit einer solchen Spaltung ist aber deshalb keine unmittelbare, weil wir nicht ohne weiteres aus der Tatsache, dass die Gesamtreihe $\Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$ als Dirichletreihe zu einer fastperiodischen Funktion $f(s)$ gehört, schliessen können, dass die beiden Teilreihen $\sum\limits_{\Lambda_n > 0}$ und $\sum\limits_{\Lambda_n < 0}$ je für sich Dirichletentwicklungen von fastperiodischen Funktionen sind, und die so entstehende Schwierigkeit ist keine nur scheinbare, denn durch Konstruktion passender Beispiele lässt sich tatsächlich die Existenz fastperiodischer Funktionen $f(s)$ nachweisen, bei welchen eine Laurenttrennung im obigen Sinne nicht möglich ist. Glücklicherweise lässt sich aber dieser Übelstand ganz überwinden oder vielmehr umgehen. Es gilt nämlich der ganz hübsche Satz, dass wenn auch nicht die gegebene Funktion $f(s)$ selbst, so doch immer ihr *Differentialquotient* $f'(s)$ (welche wiederum in $[\alpha, \beta]$ fastperiodisch ist und die durch formales Differenzieren entstehende Reihe $\Sigma A_n \Lambda_n e^{\Lambda_n s}$ als Dirichletreihe besitzt) eine Laurenttrennung erlaubt, und mit Hilfe dieser Laurenttrennung des Differentialquotienten lässt sich nun weitgehend dasselbe erreichen, wie im reinperiodischen Falle mit Hilfe der Laurenttrennung von $f(s)$ selbst. Als besonders wichtige Anwendung sei der folgende Satz erwähnt: Es seien in zwei getrenntliegenden vertikalen Streifen $[\alpha_1, \beta_1]$ und $[\alpha_2, \beta_2]$ zwei fastperiodische Funktionen $f_1(s)$ bezw. $f_2(s)$ gegeben, von denen angenommen wird, dass sie formal dieselbe Dirichletentwicklung, d. h. dieselben Dirichletexponenten und Dirichletkoeffizienten, besitzen; dann lässt sich $f_1(s)$ von ihrem Streifen $[\alpha_1, \beta_1]$ heraus bis in den Streifen $[\alpha_2, \beta_2]$ analytisch fortsetzen, und zwar unter Beibehaltung ihrer Fastperiodizität, und geht bei dieser Fortsetzung in $f_2(s)$ über. Dieser Satz mag als *erweiterter Eindeutigkeitssatz* benannt werden. Während der eigentliche Eindeutigkeitssatz besagt, dass zwei in einem und demselben Streifen gegebene fastperiodische Funktionen identisch sind, wenn sie dieselbe Dirichletentwicklung besitzen, besagt der Eindeutigkeitssatz in der erweiterten Fassung, dass es sich bei zwei Funktionen mit derselben Dirichletentwicklung tatsächlich immer um nur eine und dieselbe analytische Funktion handelt, auch wenn die beiden Funktionen zuerst in zwei verschiedenen Streifen gegeben sind.

Nunmehr wollen wir eine fastperiodische Funktion $f(s)$ betrachten, deren Streifen $[\alpha, \beta]$ zu einer *ganzen Halbebene*, etwa einer linken Halbebene $[-\infty, \beta]$ ausgeartet ist. Wie wir wissen, trifft dies immer dann ein, wenn die Dirichletexponenten Λ_n alle $\geqq 0$ sind, kann aber auch sonst vorkommen. Um hier die Analogie mit den gewöhnlichen Laurentreihen und Potenzreihen möglichst deutlich hervortreten zu lassen, werden wir es vorziehen, in der z-Ebene statt in der s-Ebene zu operieren (also die anfangs genannte Variabeltransformation $s = \log z$ auszuführen), so dass wir es, statt mit einer in einer linken Halbebene gegebenen Funktion $f(s)$, mit einer Funktion $\varphi(z) = f(\log z)$ zu tun haben, welche in einer gewissen kreisförmigen Umgebung des unendlichblättrigen Windungspunktes $z = 0$ analytisch und in bezug auf die Amplitude fastperiodisch ist, und deren Dirichletentwicklung, oder hier vielleicht besser verallgemeinerte oder irreguläre Laurententwicklung, mit

$$\Sigma A_n z^{\Lambda_n}$$

bezeichnet wird. Wir stellen uns die Frage nach *dem Verhalten dieser Funktion $\varphi(z)$, wenn der variable Punkt z sich dem Windungspunkte $z = 0$ nähert.* Ganz entsprechend dem klassischen *Weierstrass*schen Resultat für eine in einer schlichten Umgebung des Punktes 0, mit Ausnahme dieses Punktes selbst, gegebene analytische Funktion findet man auch in unserem allgemeinen Fall, dass es nur die folgenden *drei verschiedenen Möglichkeiten* gibt.

1. $\varphi(z)$ strebt gegen einen endlichen Grenzwert und zwar gleichmässig in allen den unendlich vielen Blättern; dies mag als der „reguläre" Fall bezeichnet werden und tritt ein, wenn die Exponenten Λ_n alle $\geqq 0$ sind.

2. $\varphi(z)$ strebt numerisch gegen Unendlich und zwar jedenfalls gleichmässig in allen Blättern; dies ist der „polare" Fall und tritt ein, wenn es negative Exponenten gibt und unter ihnen einen numerisch grössten.

3. Die Werte von $\varphi(z)$ in einer beliebig kleinen unendlichblättrigen Umgebung von $z = 0$ liegen in der ganzen komplexen Ebene überall dicht; dieser „wesentlich singuläre" Fall tritt ein, wenn es negative Exponenten gibt, unter ihnen aber keinen numerisch grössten; die negativen Exponenten können sich hier also entweder, wie in dem klassischen Fall, gegen $-\infty$ häufen oder sich gegen eine endliche negative Zahl Λ als ihre untere Grenze häufen, welche Zahl aber nicht selbst zur Exponentenmenge gehören darf. In diesem „wesentlich singulären" Fall gilt auch weitergehend der *Picard*sche *Satz,* dass $\varphi(z)$ in jeder Umgebung von $z = 0$ alle Werte mit höchstens einer einzigen Ausnahme annimmt; falls die untere Grenze der negativen Exponenten eine endliche ist, lässt sich übrigens zeigen, dass überhaupt kein Ausnahmewert vorhanden sein kann.

Wie angenehm es in manchen Fällen ist, mit den soeben besprochenen fastperiodischen „Funktionselementen" $\Sigma A_n z^{\Lambda_n}$ umzugehen — welche ja als weitgehende und natürliche Verallgemeinerungen der algebraischen Funktionselemente anzusehen sind — und wie abgerundet die Klasse der fastperiodischen Funktionen erscheint, tritt vielleicht besonders deutlich durch den folgenden neuerdings bewiesenen *Umkehrsatz* hervor: Es sei $w = \varphi(z) \sim \Sigma A_n z^{\Lambda_n}$ eine in einer Umgebung des unendlichblättrigen Windungspunktes $z = 0$ fastperiodische Funktion, welche lauter positive Exponenten besitzt (regulärer Fall), unter welchen es ausserdem einen kleinsten geben soll. Es ist dann leicht zu sehen, dass durch diese Funktion $w = \varphi(z)$ eine hinreichend kleine Umgebung des unendlichblättrigen Windungspunktes $z = 0$ auf eine gewisse volle Umgebung des unendlichblättrigen Windungspunktes $w = 0$ abgebildet wird, so dass wir in einer Umgebung dieses Windungspunktes $w = 0$ von der zu $w = \varphi(z)$ inversen Funktion $z = \psi(w)$ sprechen können. Es lässt sich nun zeigen — und dies ist der Umkehrsatz — *dass diese inverse Funktion* $z = \psi(w)$ *wiederum eine fastperiodische Funktion ist.* Aus diesem Satze folgt z. B., dass die inverse Funktion der Riemannschen Zetafunktion, sowie anderer wichtigen zahlentheoretischen Funktionen (wenn diese erst einer harmlosen Variabeltransformation unterworfen werden) wiederum fastperiodische Funktionen sind. Es wäre vielleicht eine Aufgabe von Interesse, diese fastperiodischen Umkehrfunktionen und insbesondere ihre Dirichletentwicklungen näher zu untersuchen.

Ich schliesse diese kurze Skizze der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen und damit meinen Vortrag mit einer Besprechung einiger interessanten noch unveröffentlichten Resultate von *Börge Jessen,* über die *Werteverteilung* einer fastperiodischen Funktion. Indem ich mich hier wieder der Sprache der s-Ebene bediene, betrachten wir eine beliebige in einem Streifen

$[\alpha, \beta]$ fastperiodische Funktion $f(s)$. Es sei a ein fester Wert, welcher von $f(s)$ in diesem Streifen angenommen wird. Wir fragen nach der Verteilung aller a-Stellen unseres Streifens. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $a = 0$ angenommen werden, so dass wir es gerade mit den Nullstellen von $f(s)$ zu tun haben. Es sei (γ, δ) ein Teilstreifen von (α, β), welcher mindestens eine von den Nullstellen von $f(s)$ im Innern enthält. Mit $N(T)$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen in demjenigen Teil des Streifens (γ, δ), dessen Ordinaten t zwischen $-T$ und T gelegen sind. Aus der Fastperiodizität von $f(s)$ ergibt sich unschwer, dass diese Anzahl $N(T)$ für $T \to \infty$ ins Unendliche wächst, und zwar, wie im reinperiodischen Fall, von der Ordnung T in dem Sinne, dass $\frac{N(T)}{2T}$ für hinreichend grosse Werte von T zwischen zwei positiven Konstanten bleibt. Es erhebt sich nun von selbst die weitere Frage, ob die Verteilung der Nullstellen in (γ, δ) auch im allgemeinen fastperiodischen Fall eine so regelmässige ist, dass der obige Quotient $\frac{N(T)}{2T}$ für $T \to \infty$ sogar einem bestimmten Grenzwerte $G = G(\gamma, \delta)$ zustrebt, also ob man von einer bestimmten „relativen Häufigkeit" der Nullstellen in (γ, δ) sprechen kann. Die Antwort lautet, dass bei einer gegebenen fastperiodischen Funktion $f(s)$ dies wohl nicht immer, sondern „fast immer" der Fall ist, in dem Sinne, dass es höchstens abzählbar viele Wertepaare γ, δ im Intervalle $\alpha < \sigma < \beta$ gibt, für welche der Grenzwert $G(\gamma, \delta)$ nicht existiert. Die kritischen etwaigen Ausnahmewerte von γ und δ, sowie der Grenzwert $G(\gamma, \delta)$ für alle anderen Wertepaare γ, δ lässt sich nach *Jessen* in der folgenden einfachen Weise charakterisieren: Bei jedem festen σ des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ bildet man den Mittelwert

$$\nu(\sigma) = M\{\log|f(\sigma + it)|\},$$

dessen Existenz für jedes σ aus der Fastperiodizität von $f(s)$ gefolgert werden kann. Die in dieser Weise unserer analytischen Funktion $f(s)$ zugeordnete reelle Funktion $\nu(\sigma)$ des Intervalles $\alpha < \sigma < \beta$ zeigt sich als stetig und *konvex*, so dass die durch $\nu = \nu(\sigma)$ bestimmte Kurve bis auf höchstens abzählbar viele Punkte, wo sie Knicke aufweist, eine bestimmte Tangente besitzt. Diese konvexe Kurve $\nu = \nu(\sigma)$ beherrscht nun die Nullstellenverteilung von $f(s)$ in der einfachen Weise, dass die den Knickpunkten der Kurve entsprechenden Abszissen σ gerade die oben erwähnten etwaigen Ausnahmewerte von γ und δ sind, währenddem für jedes andere Wertepaar γ, δ, für welche also die Ableitungen $\nu'(\gamma)$ und $\nu'(\delta)$ beide vorhanden sind, der obige Grenzwert $G(\gamma, \delta)$ existiert und einfach gleich $\frac{1}{2\pi}\{\nu'(\delta) - \nu'(\gamma)\}$ ist.

Durch diesen Satz, welcher sich bei näherer Betrachtung als eine natürliche Verallgemeinerung einer klassischen *Jensen*schen Formel auf fastperiodische Funktionen erweist, ist das Problem der Werteverteilung fastperiodischer Funktionen im allgemeinen klargestellt. Wenn es sich aber darum handelt, für eine bestimmte vorgelegte fastperiodische Funktion die Werteverteilung zu untersuchen, und vor allem den Grenzwert $G(\gamma, \delta)$ näher zu bestimmen, muss man gewöhnlich die Dirichletentwicklung der Funktion heranziehen. Für den speziellen Fall der Riemannschen Zetafunktion und einiger verwandten Funktionen hat der Vortragende schon vor vielen Jahren das Werteverteilungsproblem, von den zugehörigen Dirichletschen Reihen ausgehend, und zwar unter Verwendung der Theorie der Diophantischen Approximationen und der Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen behandelt. Unter Verwendung wesentlich verschärfter Hilfsmittel wurden diese Fragen neuerdings in Zusammenarbeit mit *Jessen* wieder aufgenommen und zu einem gewissen Abschluss gebracht. Hierbei gelang es übrigens, das Werteverteilungsproblem der Riemannschen Zetafunktion auch ausserhalb der Halbebene $\sigma > 1$, wo die Funktion im eigentlichen Sinne fastperiodisch ist, zu verfolgen, und zwar auch in dem sogenannten kritischen Streifen der Zetafunktion die Existenz von relativen Häufigkeiten der a-Stellen im obigen Sinne nachzuweisen. Diese in vertikaler Richtung vorhandene asymptotische Regelmässigkeit der Werteverteilung mag dahin gedeutet werden, dass auch ausserhalb des eigentlichen Gebietes der Fastperiodizität eine gewisse Art von abgeschwächter Fastperiodizität oder Fastperiodizität im weiteren Sinne spürbar ist.

Hiermit streifen wir aber die Frage nach den *Verallgemeinerungen* der Theorie der fastperiodischen Funktionen, oder vielmehr den Verallgemeinerungen des Begriffes der Fastperiodizität. Hierauf näher einzugehen wird aber bei dieser Gelegenheit keine Zeit sein. Ich werde mich damit begnügen zu erwähnen, dass während die Verallgemeinerungen der Theorie der fastperiodischen Funktionen einer *reellen* Veränderlichen — wo es sich darum handelt, sich von Stetigkeitsannahmen und dergleichen zu befreien — durch die Arbeit verschiedener Forscher zu einem relativen Abschluss gelangt sind, ist für den Fall einer *komplexen* Veränderlichen, wo es sich um Erweiterungen ganz anderer Art handelt, das Problem der Verallgemeinerungen nur recht wenig untersucht. Hier ist eigentlich nur eine schöne Arbeit von *Besicovitch* zu nennen, welche sich an eine frühere Untersuchung von *Carlson* über eigentliche Dirichletsche Reihen anschliesst, und mehrere interessante Fragen harren hier noch immer ihrer Lösung.

Le rôle de la géométrie algébrique dans les mathématiques

Par F. Severi, Roma

L'algèbre et la géométrie algébrique, c'est-à-dire l'expression synthétique des relations formelles et fonctionnelles de l'algèbre, ont été à toute époque, même sous des dénominations différentes, les champs expérimentaux les plus importants et les plus utiles des mathématiques. Nous en avons vu des exemples expressifs dans ce même Congrès dans la brillante conférence de M. Julia.

Beaucoup des conceptions originaires des branches aujourd'hui les plus éloignées de l'algèbre, ont pris naissance de cette science, et l'imagination algébrique joue toujours un rôle fondamental dans le développement d'un très grand nombre de théories de l'analyse et de la géometrie, quoique ce rôle soit fréquemment méconnu en étant désormais dans la sous-conscience de tout mathématicien.

Un aperçu sur l'histoire de notre science nous rappelle de suite ce qui est très souvent oublié, quoique bien connu de tout savant même peu cultivé dans l'histoire.

L'idée même de fonction, une des idées-force des mathématiques modernes, est née de l'algèbre; et dans ce champ elle a commencé à s'affiner et à se développer, en révélant des propriétés et des rapports qui constituent la base de l'analyse infinitésimale.

Descartes se pose le problème de savoir quelles sont les courbes dont il doit être question dans la nouvelle science et il conclut qu'il faut se borner aux courbes algébriques. Opinion évidemment exagérée, refusée par Leibniz. Mais elle est juste en ce sens qu'il était nécessaire d'expérimenter d'abord les conceptions nouvelles sur les fonctions qu'on pouvait plus aisément dominer et manier.

L'invention du calcul infinitésimale ne peut pas être conçue si l'on fait abstraction de la préparation et de l'orientation des esprits données par l'algèbre et par la géométrie de Descartes. Cela est démontré, pour ainsi dire, par l'absurde, puisque le principe d'exhaustion des géomètres grecs était resté stérile pendant plusieurs siècles, jusqu'au moment de son union à la jeune et féconde algèbre.

On a déjà remarqué que lorsque, vers la fin du XVIII siècle, le programme ouvert par le calcul infinitésimal et par la géométrie analytique semblait près de l'épuisement, de sorte que Lagrange même se tournait vers la chimie, la géométrie de position et la géométrie descriptive, c'est-à-dire deux branches particulières de la géométrie algébrique, vinrent vivifier l'atmosphère et donner aux mathématiques d'autres éléments vitaux. Monge put alors éclaircir les propriétés fondamentales des équations aux dérivées partielles au moyen de constructions géométriques et arriver à la création de la géométrie différentielle avec ses célèbres applications de l'analyse à la géométrie.

La géométrie projective, cette branche moderne de la géométrie algébrique, qui eut dans la première moitié du XIX siècle des périodes éclatantes de fortune et qui resta presque oubliée jusqu'à ces dernières années, a elle-même contribué puissamment au renouvellement de notre science.

L'idée de transformation et de correspondance et celle de groupe de transformations, dont chaque mathématicien fait désormais usage presque tous les jours, tirent leur origine de la géométrie projective. D'un autre côté les conceptions et les rapports fondamentaux sur les groupes de transformations ont trouvé leurs premiers aliments dans une théorie purement algébrique: celle des groupes de substitutions de Ruffini et de Galois.

Dans le champ étroitement algébrique la géométrie projective a provoqué la théorie générale des formes algébriques et des invariants. Les polaires réciproques de Poncelet et de Bobillier ont conduit Boole à la première notion de covariant.

Il serait très intéressant de construire l'arbre généalogique de chaque théorie mathématique: dans 90% des cas, j'en suis sûr, on trouverait une souche de race algébrique. L'algèbre est l'Eve, peut-être quelquefois sans Adam. La difficulté principale de la formation de ces arbres c'est que les mariages entre parents sont nombreux et le cas de polygamie très fréquent. Permettez-moi quelques exemples en style télégraphique:

a) *Géométrie descriptive.*	*Descendance:* géométrie différentielle, géométrie projective.
b) *Géométrie projective.*	*Descendance du* 1er *degré:* théorie des transformations et des groupes. Théorie des invariants. Géométrie abstraite (Möbius, Plücker, Staudt). Géométrie à plusieurs dimensions développée dans le sens algébrique (Cayley, Klein, Veronese, Segre, etc.).
c) *Descendance du* 2me *degré:*	Géométrie non-euclidienne, descendance directe de la géométrie projective et de la géométrie différentielle. Géométrie riemannienne. Analysis situs.
d) *Descendance du* 3me *degré*	(moyennant le mariage parmi groupes, invariants, fonctions): groupes discontinus et continus; fonctions automorphes.
e) *Descendance du* 4me *degré*	(moyennant le mariage parmi géométrie non-euclidienne, géométrie différentielle, forme algébrique): calcul différentiel absolu; relativité générale, parallelisme de Levi-Civita.
f) *Descendance du* 5me *degré:*	Espace à connexion affine et projective de Cartan, Schouten, Weyl, Veblen, etc.

J'ai laissé de côté plusieurs branches collatérales, en entendant seulement de donner un petit essai d'une classification qui serait fort intéressante. D'autre part nous devrons revenir dans la suite sur des relations de l'espèce envisagée.

* * *

Parmi les théories contemporaines, deux surtout sont étroitement liées à la géométrie algébrique, quoique les liaisons ne soient pas toujours visibles au premier abord. Je parle de la topologie et de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

La topologie aura sans doute un rôle fondamental dans la mathématique de l'avenir, dont on aperçoit de plus en plus les caractères qualitatifs et intégraux.

Eh bien, les questions fondamentales de la topologie ont été posées par la géométrie algébrique. Il ne faut pas remonter à Riemann, Betti, Poincaré, Picard: il est suffisant de se rapporter aux remarquables progrès récents des écoles contemporaines. L'influence originaire de la géométrie projective sur la pensée de M. Veblen et de M. Weyl est presque évidente; comme le caractère algébrique de la formation intellectuelle de M. Alexander et de M. Lefschetz, qui eut plusieurs contacts avec l'école italienne, est certain. Il va sans dire, que pour ordonner l'Analysis situs en système déductif et pour élever la puissance de son esprit de généralité, la théorie des ensembles a rendu et rendra toujours de grands services. Mais dans la position et l'orientation des problèmes la géométrie algébrique continue et continuera sa fonction créatrice.

Il faut que je descende de ces affirmations générales à quelques réflexions un peu plus détaillées. Je considère comme un des exemples les plus significatifs la théorie des intersections des cycles sur une variété topologique, qui a commencé par une remarque importante de Kronecker, relative à la détermination du nombre des solutions de plusieurs équations analytiques dans un domaine donné, et qui a été conduite tout récemment à un haut degré de généralité et de perfection par M. Lefschetz.

Je ne veux pas dire que tout ce que l'on rencontre dans cette théorie ait son premier germe dans la géométrie algébrique. Voici une différence remarquable entre ce champ et un champ dans lequel on suppose seulement la continuité. Les intersections de deux cycles quelconques d'une variété topologique ont un signe qui n'est pas généralement le même pour chaque intersection; tandis que les intersections de deux cycles algébriques dans une riemannienne ont un signe constant.

Et j'ajoute que même s'il était vrai que toute idée topologique ait sa racine en algèbre, cela ne diminuerait point la génialité d'une intuition qui aperçoit des rapports généraux là où l'on n'a vu auparavant que des rapports particuliers.

Dans la théorie des intersections des cycles, on donne une signification aux intersections (qu'elles soient isolées ou non) qui élimine au premier abord toute difficulté découlant des positions particulières des cycles et qui en outre est invariante vis-à-vis des transformations biunivoques continues, c'est-à-dire des homéomorphismes. Ainsi on arrive à parler d'un nombre fini d'intersections de deux lignes simples, fermées de Jordan, dans le plan, même si les deux lignes ont en commun des arcs. Dans ce but on substitue à un des deux cycles un cycle approché convenable et l'on démontre l'invariance topologique, par rapport aux deux cycles donnés, de la définition des intersections trouvées au moyen du cycle approché.

Eh bien, cette conception existe déjà en géométrie algébrique, du moins pour ce qui se rapporte aux cycles algébriques, en toute rigueur et précision. Je crois bien de m'arrêter un instant sur la question. La plupart des mathématiciens qui ne connaissent pas à la fond la géométrie algébrique italienne et de ceux qui sont arrivés à s'occuper de ses résultats par l'intérêt de certaines questions collatérales, considèrent quelquefois nos méthodes comme quelque chose de mystérieux qui ne peut pas être manié sans danger en dehors d'un petit nombre d'initiés; et ils préfèrent pour cela créer ou perfectionner d'autres méthodes; ils croient même quelquefois devoir mettre au point des résultats que nous connaissons depuis longtemps avec précision.

Même en Allemagne, où les méthodes algébrico-géométriques ont eu d'importantes impulsions initiales à travers l'œuvre décisive de Brill et Nœther, continuateurs éminents de la tradition riemannienne, l'usage de ces méthodes a été interrompu pendant une longue période et ce n'est que dans ces derniers temps que de jeunes mathématiciens allemands très bien qualifiés reprennent avec entrain la glorieuse tradition.

M. Van der Waerden, dont j'estime beaucoup l'intéressante production, a écrit tout récemment que dans le problème des intersections les méthodes algébriques n'ont pas la même généralité que les méthodes analytiques, parce qu'ils ne peuvent pas s'appliquer à la géométrie sur une variété abstraite quelconque, car sur une telle variété il n'existe pas généralement un groupe continu de transformations birationnelles qui puisse jouer comme le groupe des homographies dans l'espace projectif. Suivant le même auteur les méthodes analytiques mêmes ne sont pas valables dans tous les cas et par suite on ne peut avoir une définition générale et complète du concept de multiplicité d'intersection en dehors de la topologie.

M. Lefschetz à son tour, tout en reconnaissant (comme il me l'a écrit en 1930) que mes anciennes recherches sur les fondements de la géométrie énumérative „se rapprochent remarquablement de la topologie“ (plus exactement de la partie de la topologie qui n'était pas encore créée) semble croire que la démonstration du principe de la conservation du nombre, que j'ai donnée sans aucune restriction en 1912, se rapporte seulement aux intersections de variétés à $n-1$ dimensions dans une variété à n dimensions, tandis que pour la démonstration générale (de laquelle M. Van der

Waerden s'est occupé) il faudrait, selon M. Lefschetz, avoir recours à la topologie, car on doit déterminer les intersections de deux cycles quelconques.

Je ne suis pas d'accord à ce sujet ni avec M. Van der Waerden ni avec M. Lefschetz. Je crois avoir déjà démontré estimer beaucoup la topologie et ses prophètes; mais on peut quelquefois trouver la santé même en dehors de la topologie. Notre géométrie possède, depuis longtemps, les moyens d'évaluer rigoureusement la multiplicité d'intersections de deux variétés ou cycles algébriques quelconques sur une variété algébrique; et la méthode qu'on a suivie en topologie n'est que le transport – conscient dans la première phase et peut-être inconscient dans la seconde – de ces moyens là.

Voyons. Je prends, pour ne pas compliquer le langage, le cas de deux courbes algébriques A, B sur une variété algébrique C, à trois dimensions, et je suppose que A, B ont un point commun O (en un point simple de C). Il faut donner un sens à la multiplicité d'intersection de A, B en O. Le fait que A et B ne sont pas variables sur C avec continuité, pourvu que cela soit vrai, ne me gêne pas; et par conséquent je n'ai aucunement besoin d'avoir sur C un groupe continu transitif de transformations.

On démontre aisément et élémentairement qu'il est possible de conduire par la courbe A une hypersurface algébrique F d'un ordre suffisamment élevé, de l'espace ambiant, appartenant à un système linéaire n'ayant pas des points bases hors de A, de sorte qu'en donnant à F un petit déplacement, l'hypersurface déplacée G, ait exactement s intersections simples avec la courbe B voisines de O, qui aboutissent en O, lorsque G revient en F. Le nombre s est le même quelle que soit la manière de faire la construction, sous les conditions posées, et il donne la multiplicité d'intersection de A, B en O. En outre s est invariant vis-à-vis des transformations birationnelles pour lesquelles O n'est pas exceptionnel et il est le même que celui qu'on obtient par une projection générale de A, B sur un plan. A défaut de cette conception nous n'aurions jamais pu parler des caractères virtuels d'une variété tracée sur une autre: ni construire la théorie générale des correspondances algébriques; etc.

Comme on le voit dans l'exemple précédent, il s'agit de substituer à un cycle convenable à quatre dimensions, conduit par le cycle à deux dimensions A, un cycle approché: c'est-à-dire exactement la même chose qu'on fait en topologie.

Les problèmes d'équivalence, lorsque deux variétés se coupent suivant des variétés infinies de dimension plus grande que la dimension normale, peuvent être traités de la même manière. P. ex. pour évaluer le nombre des intersections de trois surfaces A, B, C de l'espace ordinaire, absorbées par une courbe D commune à ces surfaces, on donnera à l'une d'entr'elles, A, un déplacement arbitraire, de sorte que B, C et la surface déplacée se coupent en un nombre fini de points distincts (égal au produit de leurs ordres) et, parmi ces intersections, l'on évaluera celles qui sont voisines de D.

Je n'insisterai pas davantage sur des problèmes de cette espèce et je terminerai ces considérations en rappelant deux sortes de questions topologiques liées aux questions précédentes.

On sait que, d'après MM. Poincaré et Birkhoff, certaines propriétés qualitatives des intégrales des équations différentielles conduisent à des problèmes topologiques de détermination du nombre des points unis d'un homéomorphisme d'une variété topologique V en soi-même. Il s'agit, même dans ce cas, d'un problème d'intersection. En effet sur la variété produit de V avec soi-même, les homéomorphismes (en particulier l'identité) de V sont représentés par des cycles et il s'agit de déterminer les intersections d'un de ces cycles avec le cycle qui représente l'identité. Ce point de vue, emprunté à la théorie des correspondances sur une variété algébrique, a été transporté en topologie par M. Lefschetz et la conception même de produit topologique de deux variétés dérive de ma théorie des correspondances algébriques.

Il me semble qu'un des plus importants problèmes topologiques qu'on peut se poser en ce moment, est de chercher à élargir la connaissance des invariants topologiques, pour arriver à caractériser, au point de vue des homéomorphismes, une variété topologique: soit p. ex. une variété riemannienne.

On sait très bien qu'une surface fermée bilatère est caractérisée seulement par la valeur du genre, c'est-à-dire par sa connexion linéaire. Les choses se passent d'une façon très différente et bien cachée même pour les variétés à trois dimensions, pour lesquelles le problème n'est pas résolu. Les travaux classiques de Poincaré ne font que montrer sa difficulté.

Il est certain qu'il y a nombre d'invariants topologiques qui n'ont pas été considérés et qui sont indépendants des invariants connus. Ainsi p. ex. les intersections de groupes de cycles pourront donner des invariants nouveaux en posant certaines conditions de minimum pour le nombre de ces intersections. On peut aussi considérer des groupes plus généraux que le groupe d'équivalence de Poincaré, se rapportant aux cycles de dimension quelconque, dont on a fixé un sous-cycle (en particulier un point): j'ai donné la définition de ces groupes au Séminaire mathématique de Rome en 1931. Peut-être faudra-t-il les étudier.

* * *

Je vais parler d'un autre ordre de questions dans lequel la géométrie algébrique et peut-être ma théorie de la base pourront rendre d'utiles services. Je fais allusion aux propriétés arithmétiques des courbes et des variétés algébriques, c'est-à-dire aux problèmes classiques de la théorie des nombres, concernant la solution des équations algébriques indéterminées, à cœfficients rationnels, en nombre entiers ou rationnels. Les plus anciennes recherches sur ce sujet, qui s'appuient sur la géométrie sur une courbe et qui ont porté sur des équations particulières, sont de MM. Hilbert, Hurwitz (1896), Poincaré, B. Levi (1905—1907); les plus récentes (après 1922) qui considèrent aussi des types très généraux d'équations, appartiennent à MM. Mordel, André Weil, Nagell, Thue, Siegel, etc. Il faut avant tout remarquer que le résultat de Hilbert-Hurwitz-Poincaré concernant la possibilité de réduire une courbe rationnelle à coéfficients rationnels, à une droite ou bien à une conique sans points rationnels, est virtuellement contenu dans un théorème donné en 1870 par Max Nœther, concernant la possibilité de réduire birationnellement toute courbe rationnelle à une droite ou à une conique, sans introduire des irationnalités arithmétiques, suivant que l'on connait ou non un point de la courbe. Je crois devoir rendre cet hommage au souvenir du grand savant allemand, dont les travaux ont été quelquefois méconnus et que les géomètres italiens considèrent comme un des leurs maîtres.

Le résultat le plus expressif a été obtenu en 1930 par M. Siegel en se basant sur les résultats obtenus précédemment par le jeune mathématicien français M. André Weil, et sur les méthodes d'approximation diophantique. Le résultat dont il s'agit est le suivant: Dans un corps algébrique donné les solutions en nombres entiers de toute équation à deux variables de genre > 0, sont en nombre fini et il est aisé de déterminer les équations de genre 0, qui admettent une infinité de solutions entières. Le problème de savoir quelles équations à deux variables possèdent une infinité de solutions entières est ainsi complètement résolu; et il est vraisemblable que même le nombre des solutions rationnelles d'une équation à deux variables de genre > 1, est fini. Tout cela nous fait approcher notablement de la démonstration du grand et célèbre théorème de Fermat.

* * *

Je vais maintenant parler des relations entre la géométrie algébrique et la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables qui s'est développée remarquablement dans les derniers temps.

Les propriétés sur la divisibilité des fonctions algébroïdes, en tant qu'elles sont liées aux théorèmes d'existence des fonctions implicites, n'introduisent pas d'éléments nouveaux par rapport à ceux qui existent déjà dans l'admirable théorie des fonctions analytiques d'une variable crée par Cauchy, Riemann et Lagrange-Weierstrass. C'est encore à la géométrie algébrique qu'on doit l'introduction des premières idées essentiellement nouvelles.

Clebsch et Noether avaient défini en 1869 les intégrales doubles de première espèce et M. Picard avait introduit en 1884 les intégrales simples attachées à une surface algébrique. C'est là que commence la théorie nouvelle.

La définition de Clebsch-Nœther supposait un concept qu'on n'avait pas encore avec précision. Mais comme quelquefois la science a besoin de nébuleuses qui contiennent en formation les étoiles, cette indétermination même rendait nécessaires d'autres recherches importantes, qui furent achevées en 1886 par Poincaré. A ce grand géomètre remonte la définition rigoureuse d'intégrale multiple dans le champ complexe et l'extension du théorème relatif à l'intégrale de Cauchy. Cette extension fut déterminée par des problèmes géométriques concernant les périodes et les résidus des intégrales multiples.

Il est bon de répéter ici une constatation qui me parait instructive: ce fut précisément l'extension du théorème de Cauchy qui donna l'occasion à M. Volterra, en 1887, d'introduire des conceptions nouvelles de calcul fonctionnel, duquel, comme tout le monde le sait, il a été un des plus éminents créateurs. Voici donc démontré encore une fois la fécondité de l'association d'idées en apparence très éloignées et l'opportunité de nous rafraîchir souvent, dans nos voyages vers l'inconnu mathématique, à une source riche et limpide comme l'algèbre.

Pour étudier les fonctions analytiques dans leur champ complet d'existence, il faut fixer avant tout la manière d'introduire l'infini dans le domaine de variabilité de plusieurs variables complexes. On doit chercher une indication précise et naturelle à ce propos dans notre géométrie, en tant qu'elle considère toujours des fonctions qui s'étendent à l'infini, comme les fonctions rationnelles et algébriques et leurs intégrales: les fonctions hyperelliptiques, abéliennes, etc. Eh bien, notre géométrie envisage toujours l'infini au point de vue projectif, de sorte que les définitions du comportement des fonctions à l'infini, demeurent invariants par rapport aux changements les plus simples de variables: c'est-à-dire aux substitutions linéaires.

J'ai montré que ce point de vue est le seul qui conduit à identifier le domaine de plusieurs variables complexes avec une variété topologique réelle, la plus simple possible, fermée et partout homogène.

L'homogénéité topologique est essentielle si l'on ne veut pas rencontrer fréquemment des paradoxes, qu'on réussit à peine à éviter par des analyses inutilement fatigantes.

Il est bien évident que la substance des choses ne peut changer d'une façon ou de l'autre que l'on envisage l'infini, pourvu que l'interprétation finale soit correcte. Mais voilà une raison de plus de saisir le point de vue le plus simple.

On doit donc prendre comme un modèle topologique du champ complet de variabilité de n variables complexes, la riemannienne de l'espace projectif complexe à n dimensions. On peut aisément construire pour chaque riemannienne des modèles algébriques réels. Pour l'espace projectif on a ainsi une variété remarquable, qui a été decouvert par Corrado Segre, mon regretté et éminent maître. J'ai trouvé que cette variété a le plus petit ordre parmi les variétés algébriques réelles qui représentent la même riemannienne. Elle est donc, à un certain point de vue, un modèle qui ne peut pas être remplacé.

Dans le cas d'une variable on retombe ainsi sur la sphère ou sur une quadrique à points elliptiques; dans le cas de deux variables sur une variété V elliptique du sixième ordre de l'espace à huit dimensions. Une projection de V, analogue à la projection stéréographique de la sphère, ramène la représentation de deux variables complexes sur l'espace euclidien réel à quatre dimensions. Dans cette représentation il existe nécessairement des éléments exceptionnels. En effet, il y a une congruence linéaire elliptique C de droites exceptionnelles à l'infini, chacune d'elles représentant un seul point de V. La représentation cesse d'être homogène. Les droites directrices a, b de la congruence C sont imaginaires conjuguées.

J'ai exposé ces détails parce qu'ils constituent le fondement d'une méthode géométrique pour étudier les fonctions analytiques de deux variables. Cette méthode a été développée par moi-même et par mon élève M. Beniamino Segre.

Je donnerai, en peu de mots, quelques renseignements sur le sujet. Une surface caractéristique de l'espace S à quatre dimensions (c'est-à-dire, suivant la dénomination de M. Levi-Civita, une surface représentant une relation analytique entre x, y) est caractérisée géométriquement par la propriété que ses plans tangents – qui sont évidemment caractéristiques – s'appuient sur les droites a, b, les intersections étant les points cycliques de ces plans. Cela rend évident p. ex. qu'une surface caractéristique ne peut pas se renverser, avec changement de ses deux côtés entr'eux, par une variation continue qui la laisse toujours caractéristique. En effet les points cycliques de ses plans tangents se meuvent séparément sur a, b et ne peuvent pas s'échanger entr'eux. On a ici l'extension aux courbes analytiques d'une propriété donnée par M. Lefschetz pour les courbes algébriques.

Une surface caractéristique $f(x, y) = 0$ qui n'a que des points simples et des points multiples algébroïdes, s'étend nécessairement à l'infini et si f est uniforme dans un domaine à quatre dimensions comprenant à l'intérieur la surface, celle-ci est toujours la riemannienne d'une courbe algébrique. (Lorsque la condition posée pour f n'est pas satisfaite le théorème n'est pas toujours vrai). Ce théorème contient la proposition classique de Weierstrass-Hurwitz, relative à la rationnalité d'une fonction analytique de plusieurs variables partout méromorphe.

Si une fonction analytique d'une variable complexe et d'une variable réelle, qu'on peut représenter sur un hyperplan de l'espace S, est holomorphe sur une surface fermée simple de cet hyperplan, elle est aussi holomorphe à l'intérieur de la surface. De là s'ensuit immédiatement le théorème de M. Hartogs, affirmant la régularité, à l'intérieur d'une cellule finie à quatre dimensions, d'une fonction analytique de deux variables complexes, qui est holomorphe à la frontière de la cellule. Ce théorème – comme le dit justement M. Osgood – est le plus frappant de toute la théorie.

Il est de même aisé de déduire, au point de vue géométrique, les théorèmes de M. E. E. Levi sur les hypersurfaces qui peuvent être frontières des champs d'existence des fonctions de deux variables, etc.

A propos du théorème de Hartogs, on doit rappeler dans ce lieu que la première des propriétés surprenantes des singularités des fonctions de plusieurs variables (c'est-à-dire l'inexistence de points singuliers isolés) fut énoncée ici, à l'occasion du I. Congrès international des mathématiciens, par Adolf Hurwitz, le maître regretté de l'Ecole polytechnique de Zurich, qui a laissé de très importants travaux même dans le domaine algébrique.

Je veux signaler encore un problème surtout à cause de ses relations avec le théorème d'existence des fonctions algébriques de deux variables. J'ai nommé le problème de Dirichlet pour les fonctions biharmoniques, c'est-à-dire pour les fonctions qui sont les parties réelles (ou imaginaires) des fonctions analytiques de deux variables complexes. Poincaré en 1883 s'était borné à remarquer qu'on ne peut pas choisir arbitrairement la fonction déterminée sur la frontière d'une cellule à quatre dimensions par une fonction biharmonique régulière, comme on peut le faire (sous certaines conditions qualitatives) dans le problème ordinaire de Dirichlet pour les fonctions harmoniques. M. Levi-Civita en 1905, en face de cette impossibilité, s'était borné à étendre aux fonctions de deux variables le point de vue local de Cauchy.

J'ai pu en 1931 résoudre le problème intégral, en écrivant explicitement les conditions nécessaires et suffisantes à imposer à la frontière de la cellule pour déterminer univoquement une fonction biharmonique ou analytique holomorphe à l'intérieur. Ces conditions sont étroitement différentielles, de sorte que les relations à la frontière entre les parties réelles et imaginaires d'une fonction analytique holomorphe dans la cellule, sont elles-mêmes différentielles. Cela constitue un résultat inattendu, car dans le problème analogue pour les fonctions d'une variable on a des relations purement intégrales. M. Fubini a retrouvé récemment le théorème en restant dans le champ réel.

J'ai établi aussi un théorème d'unicité qui réduit énormement le choix des éléments arbitraires pour la détermination d'une fonction analytique de deux variables, holomorphe dans la cellule. En effet il est nécessaire de connaître au plus deux fonctions analytiques d'une variable réelle le long d'un petit arc, choisi d'une façon générale sur la frontière à trois dimensions. Il faudrait démontrer que ces éléments sont effectivement nécessaires, ce qui résoudrait la question d'existence corrélative.

Les rapprochements entre les questions indiquées et le théorème d'existence des fonctions algébriques de deux variables, deviennent évidents, lorsqu'on rappelle les relations entre le problème ordinaire de Dirichlet et le théorème d'existence de Riemann. Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables, au point de vue algébrico-géométrique, on a des recherches intéressantes de MM. Enriques, Zariski, B. Segre; mais la question est loin d'être achévée.

En traitant des fonctions analytiques je laisse de côté les questions relatives à la représentation analytique des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire aux transformations que j'appelle pseudoconformes, car elles ont été traitées par M. Carathéodory dans sa conférence magistrale. Il s'agit d'un domaine qui va à présent s'élargir de plus en plus, surtout en Allemagne et en France, et où l'on a bien des résultats brillants et importants dûs à M. Carathéodory même et à Poincaré, Almer, Reinhardt, Blaschke, Behnke, Bergmann, Elie et Henri Cartan, Thullen, etc. Au point de vue géométrique une transformation pseudoconforme en x, y est caractérisée par la condition de transformer chaque plan imaginaire de l'espace à quatre dimensions passant par l'une des droites a, b, dans un plan analogue. Cela, comme l'a montré M. B. Segre, éclaircit notablement le problème de Poincaré, pour l'équivalence des cellules à quatre dimensions vis-à-vis des transformations susdites. Le problème, au point de vue local, a été résolu par M. Elie Cartan dans des travaux qui viennent de paraître.

* * *

En m'approchant de la fin, j'ajoute quelques mots sur les relations entre notre géométrie et les problèmes d'intégration des équations différentielles dans le domaine analytique.

On connait les profondes recherches de M. Painlevé sur les équations du 2e ordre à points critiques fixes. Un théorème donné à ce propos et qui achève presque complètement la connaissance de ces équations, a été aisément démontré, il y a quelques années, par mon élève M. Tricomi, comme application de la géométrie sur une surface algébrique. En conséquence toute équation du type envisagé se ramène de suite, à deux équations du premier ordre très simples.

L'intégration des équations différentielles du premier ordre où la dérivée de la fonction inconnue y est égale à une fonction algébrique quelconque de la variable x, c'est-à-dire égale à une fonction rationnelle d'un point (x, y, z) d'une surface algébrique, lorsqu'il a un multiplicateur rationnel en x, y, z, se ramène à l'étude des intégrales picardiennes attachées à la surface. Dans mes anciennes recherches sur ces intégrales j'ai démontré p. ex. que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégration puisse s'effectuer seulement avec des opérations rationnelles et logarithmiques, est que la surface soit régulière (en particulier rationnelle). On voit ici l'extension du théorème classique relatif aux intégrales des fonctions rationnelles d'une variable, mais l'analogie se borne simplement à l'énoncé.

Certains résultats géométriques de MM. De Franchis, Comessatti, Zariski, donnent d'une façon semblable la réponse au problème d'intégration pour le cas où la dérivée de y est une fonction rationnelle de x, y et de la racine n-ième d'une fonction rationnelle de x, y.

M. Kähler, en ayant toujours égard aux problèmes d'intégration, a étendu la notion d'intégrale simple sur une surface, en introduisant les intégrales hyperabéliennes, liées aux fonctions hyperabéliennes de M. Picard, dont les fonctions modulaires de MM. Hilbert et Hecke sont des cas particuliers, et il a montré l'utilité de ces fonctions dans l'intégration des équations du 1er ordre du type général envisagé ci-dessus. Je saisis l'occasion pour ajouter que M. Kähler a donné tout récemment des liaisons très intéressantes entre la géométrie sur une variété algébrique et les formes différentielles et tensorielles de M. Elie Cartan; mais cela m'entrainerait trop loin.

Mon but principal était d'affirmer l'importance du rôle de l'algèbre et de sa géométrie dans le développement général des mathématiques. Peut-être cette thèse m'a-t-elle forcé quelquefois la main et j'ai vu trop d'algèbre où il y en a seulement un peu. Ce sont les dangers des amours passionnées. Je vous en demande pardon.

Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion

Von Rolf Nevanlinna, Helsingfors

1. Einleitung

1. Nachdem die Lehre von den elementaren Transzendenten durch die Theorie der automorphen Funktionen zu einem gewissen Abschluss gebracht worden war, lag es in der Natur der Sache, dass das Hauptproblem der konformen Abbildung in den Vordergrund des funktionentheoretischen Interesses treten musste; und mit Recht darf die Sicherstellung der Hauptsätze der konformen Abbildung und der Uniformisierungstheorie durch die Arbeiten von *Poincaré*, *Caratheodory*, *Koebe* u. a. als der grösste funktionentheoretische Fortschritt der letzten drei Jahrzehnte bezeichnet werden.

Neben diesem Königsweg der Funktionentheorie, der von *Klein* in seiner Geschichte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert in eindrucksvoller Weise geschildert worden ist, entwickelten sich gewisse andere, mehr oder weniger isolierte funktionentheoretische Problemkomplexe. Unter diesen möchte ich besonders zwei hervorheben: die Theorie der Singularitäten und der analytischen Fortsetzung einer durch eine Potenzreihe definierten Funktion, und die Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen, sowie das sich hieran anschliessende Problem der Werteverteilung einer analytischen Funktion.

2. Was nun insbesondere die Werteverteilung betrifft, welche in diesem Vortrag einer näheren Betrachtung unterzogen werden soll, so sind hier im Laufe des letzten Dezenniums durch die Zusammenarbeit mehrerer Forscher gewisse Fortschritte erzielt worden, wodurch diese Lehre einerseits an innerlicher Einheitlichkeit gewonnen hat, andererseits in Zusammenhang mit gewissen grossen Fragen der klassischen Funktionentheorie gebracht worden ist. Ich erinnere hier daran, dass jene Theorie ihren Ausgangspunkt genommen hat einerseits in der klassischen Theorie der ganzen Funktionen, deren Hauptaufgabe in der Untersuchung der Beziehungen zwischen dem Anwachsen und der Nullstellendichte einer solchen Funktion bestand, andererseits im *Picard*schen Satz, nach welchem eine eindeutige analytische Funktion in der Umgebung einer wesentlich singulären isolierten Stelle höchstens zwei verschiedene Werte auslassen kann. Durch die Arbeiten von *Hadamard* und *Borel* wurden diese Fragen im *Werteverteilungsproblem* vereinigt, das zur Klarlegung der Verteilung und der Dichtigkeit derjenigen Stellen strebt, wo eine eindeutige analytische Funktion verschiedene komplexe Werte annimmt. Das allge-

meinste hier erzielte Ergebnis kann dahin zusammengefasst werden, dass die Verteilung der Stellen, wo eine gegebene Funktion in der Umgebung einer isolierten Singularität gleich einer komplexen Zahl a wird, für fast alle Werte von a äusserst gleichmässig ist; es kann höchstens eine kleine Minorität von Werten existieren, welche die Funktion relativ selten annimmt. Die Untersuchung dieser sogenannten *Ausnahmewerte* bildet den Hauptgegenstand der Werteverteilungstheorie.

Durch die neueren Sätze über die Ausnahmewerte einer eindeutigen Funktion, welche weitgehende Erweiterungen und Verschärfungen des Picardschen Theorems darstellen, werden diese Werte in Beziehung zu den Verzweigungsstellen der zu der Funktion gehörenden Riemannschen Fläche gesetzt, d. h. derjenigen Fläche, auf welcher die gegebene eindeutige Funktion ihr schlichtes Existenzgebiet konform abbildet, und auf welcher also ihre mehrdeutige, einwertige Umkehrfunktion eindeutig ist. Die *einwertigen* analytischen Funktionen lassen sich aber auch direkt mittels Methoden der Theorie der konformen Abbildung untersuchen; auf diesem Wege sind auch die bemerkenswertesten der allerneuesten Fortschritte gewonnen. Hierdurch ist die Werteverteilungstheorie der klassischen Funktionentheorie nicht nur methodisch näher getreten; auch inhaltlich weisen die hier erzielten Ergebnisse darauf hin, dass gewisse allgemeine Klassen analytischer Funktionen Eigenschaften besitzen, welche als die sinngemässe Verallgemeinerung einiger aus der Theorie der elementaren Transzendenten, d. h. der periodischen und der automorphen Funktionen, bekannter Erscheinungen gelten können.

Im folgenden sollen diese Andeutungen über die Beziehungen der Werteverteilungslehre zur Theorie der konformen Abbildung von Riemannschen Flächen etwas näher beleuchtet werden.

2. Darstellung einer Riemannschen Fläche durch Elementarpolygone

3. Wenn auch die Werteverteilungstheorie sich teilweise mit allgemeineren Klassen von analytischen Funktionen beschäftigt hat, wollen wir uns im folgenden auf den Fall einer *eindeutigen transzendenten* Funktion beschränken, deren Existenzgebiet G *einfach zusammenhängend* ist[1]). Die Berandung Γ von G besteht dann

[1]) Insbesondere ist die Theorie der eindeutigen Funktionen auf *algebroide Funktionen* übertragen worden. Von älteren Arbeiten sind hier diejenigen von *Remoundos* zu nennen, von neueren die Untersuchungen von *Selberg*, *Valiron*, *Varapoulos* und *Ullrich*. Eine zusammenfassende Darstellung der neueren Resultate findet man bei *E. Ullrich:* Über den Einfluss der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung (Crelles Journal, B. 167; S. 198—220, 1932).

Für die sich auf den Hauptgegenstand dieses Vortrages beziehende Literatur vergl. man die Übersichten meiner Arbeiten: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (Collection Borel, Paris 1929) und Über die Werteverteilung der eindeutigen analytischen Funktionen (Vier Vorlesungen gehalten am math. Seminar der Universität Hamburg, Abhandlungen aus demselben Seminar, Band 8, Heft 4, 1931).

entweder aus einem einzigen Punkt oder aus einem Kontinum, und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass in jenem Fall Γ im unendlich fernen Punkt der z-Ebene liegt, und dass in diesem Fall das Gebiet G aus dem Innern des Einheitskreises besteht; diese zwei Fälle bezeichnet man bezw. als den *Grenzpunktfall* und den *Grenzkreisfall.*

Eine solche eindeutige Funktion $w(z)$ bildet ihr Existenzgebiet G auf eine über die w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche konform ab, auf welcher die mehrdeutige Umkehrfunktion $z(w)$ von $w(z)$ eindeutig ist. Diese Funktion ist ferner *einwertig,* d. h. sie nimmt in zwei verschiedenen Punkten der Riemannschen Fläche immer verschiedene Werte an. Indem man umgekehrt diese Riemannsche Flächen als Ausgangspunkt nimmt, lässt sich die zu untersuchende Funktionenklasse auch folgendermassen definieren: Man betrachte die Gesamtheit der unendlich vielblättrigen, einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Nach dem Hauptsatz der Theorie der konformen Abbildung lässt sich eine solche Fläche auf das Innere eines unendlichen oder endlichen Kreises eindeutig und konform abbilden; man sagt, die Fläche gehöre im Grenzpunktfall zum *parabolischen,* im Grenzkreisfall zum *hyperbolischen* Typus. Die klassische Theorie der konformen Abbildung, welche sich vor allem mit dem Nachweis der Möglichkeit einer derartigen Abbildung beschäftigt, ist bei der Feststellung dieser zwei Möglichkeiten stehen geblieben, ohne also näher auf die Frage einzugehen, wie das Eintreffen dieses oder jenes Falles von der Struktur der Riemannschen Fläche abhängig ist. Die Lösung dieses schwierigen Problems bildet nun eine der wichtigsten Aufgaben der Werteverteilungslehre, deren Hauptsätze (wie z. B. der Picardsche Satz und dessen Erweiterungen) zur Unterscheidung der in Frage stehenden zwei Möglichkeiten bemerkenswerte Beiträge enthalten.

4. Um eine anschauliche Grundlage der später folgenden allgemeineren Betrachtungen zu gewinnen, wollen wir zuerst in aller Kürze an gewisse Grundeigenschaften der einfachsten *automorphen* Funktionen erinnern. Bildet man ein in der z-Ebene gegebenes q-seitiges Kreispolygon ($q \geqq 2$) mit den Winkeln $\frac{\pi}{m_1}, \ldots, \frac{\pi}{m_q}$ auf das Innere des Einheitskreises $|w| < 1$ konform ab, und setzt man die Abbildungsfunktion mittels des *Schwarz*schen Spiegelungsprinzips analytisch fort, so erhält man bekanntlich eine eindeutige Funktion $w(z)$ dann und nur dann, wenn die Zahlen m_ν ganz (> 1) sind. Lassen wir den elliptischen Fall

$$\sum_{\nu=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) < 2$$

beiseite, der zu den rationalen Ikosaederfunktionen führt, so hat man zwischen dem *parabolischen* Fall

$$\Sigma\left(1-\frac{1}{m_\nu}\right)=2$$

und dem *hyperbolischen* Fall

$$\Sigma\left(1-\frac{1}{m_\nu}\right)>2$$

zu unterscheiden.

Unter jener Bedingung können die Seiten des Grundpolygons geradlinig gewählt werden; es ist dann $2 \leqq q \leqq 4$, und man hat insgesamt folgende Möglichkeiten

m_1	m_2	m_3	m_4
∞	∞		
∞	2	2	
3	3	3	
4	4	2	
6	3	2	
2	2	2	2

Die zwei ersten Fälle entsprechen den einfach periodischen Funktionen e^z und $\sin z$, die folgenden drei Fälle den doppelperiodischen Dreiecksfunktionen und der letzte Fall der $\wp$-Funktion. Je zwei nebeneinander liegende Polygone (Zweiecke, Dreiecke, Vierecke) bilden einen Fundamentalbereich dieser automorphen Funktionen. Die Eckpunkte der Polygone entsprechen denjenigen (zwei, drei, vier) Punkten, der

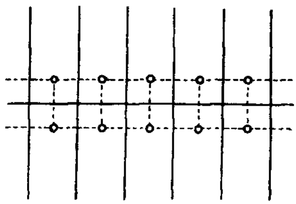


Fig. 1

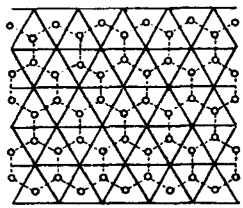


Fig. 2

w-Ebene, über denen die Windungspunkte der regulär verzweigten Riemannschen Fläche der inversen Funktionen liegen. (Vgl. Fig. 1 und 2, wo die Fälle $[\infty, 2, 2]$ und $[3, 3, 3]$ dargestellt sind.)

Im hyperbolischen Fall ist immer $q \geqq 3$, und man hat für jeden dieser Werte q eine unendliche Menge von Funktionen $w(z)$. Bei geeigneter Normierung des Grundpolygons haben diese automorphen Funktionen den Einheitskreis $|z| = 1$ als Grenzkreis. Von besonderen Interessen sind hierbei diejenigen Funktionen, welche

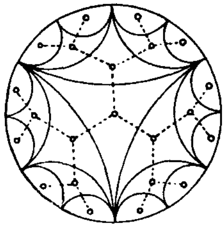


Fig. 3

als Fundamentalbereich ein Spitzenpolygon mit der Winkelsumme Null ($m_1 = m_2 = m_3 = \ldots = \infty$) haben; im Fall $q = 3$ handelt es sich dabei um die Modulfunktion (vgl. Fig. 3). Die entsprechenden Riemannschen Flächen sind die universellen Überlagerungsflächen der in den, den Spitzen des Grundpolygons zugeordneten q Punkten punktierten w-Ebene. Diese Flächen haben in der Werteverteilungstheorie eine wichtige Rolle gespielt.

5. Das in der schlichten z-Ebene entstehende Netz der Fundamentalbereiche gibt eine vollständige Übersicht über die topologische Struktur der betrachteten Riemannschen Flächen. Noch besser eignet sich indessen zu diesem Zweck eine andere Darstellungsweise, die ich hier als *Einteilung der Fläche in Elementargebiete* bezeichnen werde; unter einem *Elementargebiet* verstehe ich ein einfach zusammenhängendes Teilstück der Fläche, das genau einen *Windungspunkt* der Fläche enthält. Ist die Zerlegung in Fundamentalbereiche erst einmal vollzogen, so gelangt man zu einem System von Elementargebieten, so dass man in jedem Fundamentalpolygon (welches die eine Hälfte eines Fundamentalbereiches ausmacht), einen beliebigen inneren Punkt P auswählt, und die Punkte P sämtlich unter einander verbindet durch Linienstücke L, so dass von einem jeden der gewählten Punkte q verschiedene Linienstücke L über die q Seiten des betreffenden Polygons zu den Punkten P der Nachbarpolygone führen. Diese Linien sollen ferner so gezogen werden, dass sie sich nur in den „Knotenpunkten" P begegnen. Im vorliegenden Fall, wo die Fundamentalpolygone abwechselnd dem Inneren und dem Äusseren des Einheitskreises $|w| = 1$ entsprechen, können z. B. die Bilder der Punkte $w = 0$ und $w = \infty$ als Knotenpunkte P genommen werden; die Linien L lassen sich dann unter den Bildkurven von q Halbstrahlen $(0, \infty)$ der w-Ebene wählen, welche die auf dem Kreis $|w| = 1$ liegenden q Windungspunkte $w_1, \ldots, w_q$ voneinander trennen (vgl. hierzu Fig. 1, 2, 3, wo die Linien L eingezeichnet sind).

Durch dieses Verfahren sind die betrachteten Riemannschen Flächen in Elementargebiete eingeteilt worden. Jedes „Elementarpolygon" enthält genau einen Windungspunkt und zwar gibt die halbe Seitenzahl des Polygons an, wie viele Blätter der betreffende Windungspunkt im Zyklus vereinigt; diese halbe Anzahl, um eins vermindert, ist also gleich der Ordnung des Windungspunktes. In Fig. 4 sind die hier besprochenen 6 regulär verzweigten Flächen vom parabolischen Typus, sowie die zum hyperbolischen Typus gehörigen, den Fällen (∞, ∞, ∞) und $(\infty, \infty, \infty, \infty)$ entsprechenden Flächen durch Elementarpolygone dargestellt.

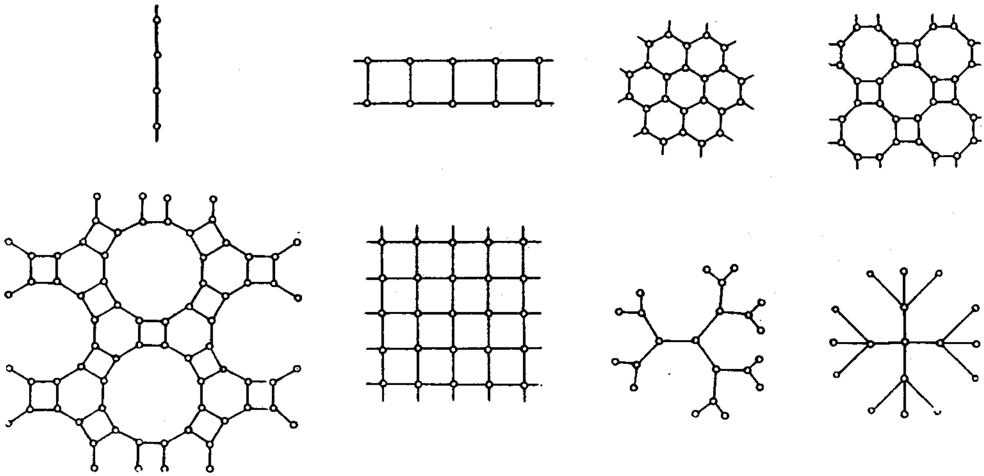


Fig. 4.

Augenscheinlich bilden die Elementarpolygone, zum mindesten wenn die Fläche Windungspunkte von hoher Ordnung besitzt, eine einfachere, und für eine Übersicht des topologischen Aufbaus der Fläche besser geeignete Konfiguration als die Einteilung in Fundamentalbereiche. Letztere wurde oben zur Konstruktion der Elementarpolygone benutzt. Es ist aber zu bemerken, dass umgekehrt die Angabe der Elementarpolygone die Lagerung der Fundamentalbereiche eindeutig bestimmt. Man braucht ja nur in jedem Elementarpolygon einen Punkt als Repräsentant des entsprechenden Windungspunktes zu nehmen, und die benachbarten Windungspunkte untereinander zu verbinden, in genau derselben Weise wie oben die Knotenpunkte P, um eine mit der Konfiguration der Fundamentalbereiche topologisch äquivalente Figur zu erhalten. Die Fundamentalpolygone und die Elementarpolygone sind also einander „dual" zugeordnet. — In der Werteverteilungstheorie hat zuerst Herr *Speiser* solche „topologische Bäume" eingeführt, um die Struktur von Flächen mit lauter logarithmischen Windungspunkten zu charakterisieren[2]).

[2]) *A. Speiser*, Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen (Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 1, H. 2, 1929) und Über Riemannsche Flächen (Ibidem, Vol. 2, H. 4, 1930).

6. Diese Darstellungsweise der Riemannschen Flächen ist ohne Modifikationen anwendbar auch für diejenigen allgemeineren *nichtregulären*, einfach zusammenhängenden Flächen, welche mit den oben betrachteten regulären die Eigenschaft gemeinsam haben, dass sich ihre Windungspunkte auf eine endliche Anzahl von Grundpunkten $w_1, \ldots, w_q$ ($q \geqq 2$) der w-Ebene projizieren. Die über einem solchen Punkt w_ν liegenden Windungspunkte sollen also jetzt nicht mehr notwendigerweise eine gegebene feste Ordnungszahl besitzen. Insbesondere soll nun auch der Fall berücksichtigt werden, wo über einem solchen Grundpunkt w_ν eine endliche oder unendliche Anzahl von an dieser Stelle unverzweigten, schlichten Blättern verlaufen.

Man ziehe durch die Grundpunkte w_ν eine Jordankurve C, wodurch die w-Ebene in ein inneres Gebiet J und ein äusseres Gebiet A zerlegt wird. Werden diese Gebiete aus der Fläche längs der Kurve C ausgestanzt, so werden für jedes Exemplar J und A gewisse der Punkte w_ν als Windungspunkte erscheinen; diese Windungspunkte w_ν, deren Anzahl zwischen q und 2 variiert (denn jedes Blatt einer Fläche muss mindestens zwei Windungspunkte besitzen), mögen *Eckpunkte* der Gebiete J und A heissen. Wenn nun eine solche Riemannsche Fläche durch die einwertige Funktion $z(w)$ schlicht abgebildet wird, wobei wiederum das Abbildungsgebiet G entweder als endlicher Kreis $|z| < 1$ (hyperbolischer Fall) oder als offene Vollebene $|z| < \infty$ (parabolischer Fall) gewählt werden kann, so zerfällt G in eine unendliche Anzahl von Fundamentalpolygonen, welche den Scheiben J und A zugeordnet sind. Die Windungspunkte der Fläche entsprechen den Eckpunkten der Fundamentalpolygone, und zwar liegt ein Eckpunkt von endlicher Ordnung innerhalb G und ein Eckpunkt von unendlicher Ordnung auf dem Rand von G. Wählt man nun in den Gebieten J und A je einen inneren Punkt, und verbindet man die in den Fundamentalpolygonen liegenden Bildpunkte P dieser Punkte durch Linienstücke L in oben erklärter Weise, so erhält man eine Einteilung der Fläche in *Elementarpolygone*,

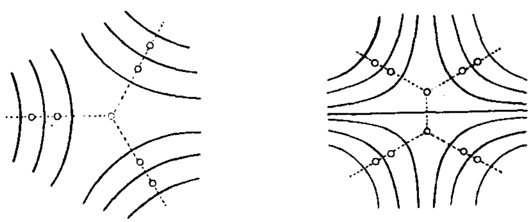


Fig. 5.

welche je einen Windungspunkt der Fläche enthalten. In Fig. 5 ist dieses Verfahren an einigen einfachen Flächen der betrachteten Klasse illustriert worden.

Unter diesen Flächen sind diejenigen, welche eine *endliche Anzahl* von Windungspunkten (Elementarpolygonen) besitzen, von besonderem Interesse[3]). Diese Klasse zeichnet sich durch die analytische Eigenschaft aus, dass die *Schwarz*sche Ableitung

$$\{w, z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

der eindeutigen Funktion $w(z)$, welche das Gebiet G auf die Riemannsche Fläche abbildet, sich auf eine *rationale* Funktion reduziert. Insbesondere erhält man die Gesamtheit der Flächen mit endlich vielen Windungspunkten von *unendlicher* Ordnung, wenn man den Schwarzschen Ausdruck gleich einem Polynom setzt; die Gradzahl des Polynoms ist um zwei Einheiten kleiner als die Anzahl der Windungspunkte der Fläche.

Die Flächen mit endlich vielen Windungspunkten gehören sämtlich zum *parabolischen* Typus. Die Funktion $w(z)$ ist meromorph und ihre Ordnung gleich der halben Anzahl der Windungspunkte unendlicher Ordnung.

In Fig. 6 habe ich einige dieser Flächen durch Elementarpolygone dargestellt; von links nach rechts gezählt entsprechen sie folgenden meromorphen Funktionen: 1) $w = ze^z$, mit einem algebraischen Windungspunkt erster Ordnung und zwei logarithmischen Windungspunkten; 2) $w = \frac{z-2}{z+2} e^z$ mit einem Windungspunkt zweiter, und zwei unendlicher Ordnung; 3) w ist gleich der von der Gleichung $\{w, z\} = z$ definierten meromorphen Funktion (von der Ordnung 3/2) mit drei logarithmischen Windungspunkten; 4) $w =$ der durch $\{w, z\} = z^2$ definierten meromorphen Funktion (von der Ordnung 2) mit vier logarithmischen Windungspunkten; 5) $w = e^{z^2}$, mit einem algebraischen Windungspunkt erster Ordnung und vier unendlicher Ordnung, von denen je zwei ($w = \infty$) übereinander liegen; 6) $w = \int_0^z e^{z^2} dz$, mit vier logarithmischen Windungspunkten, von denen zwei übereinander liegen ($w = \infty$).

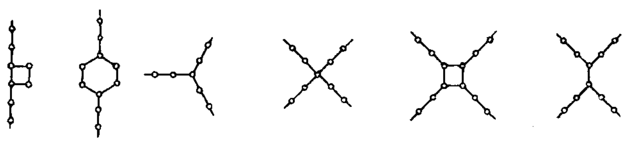


Fig. 6.

Von diesen Fällen sind 3) und 6) bereits in Fig. 5 dargestellt.

[3]) In meiner Arbeit: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten (Acta mathematica, B. 58, S. 295—373, 1932) habe ich die Gesamtheit solcher Flächen analytisch bestimmt. Die Bedeutung der Gleichung $\{w, z\} = g(z)$, wo g eine ganze Funktion ist, für die Werteverteilungstheorie ist zuerst von *Hille* entdeckt worden; vgl. seine Arbeit: Zero point problem for linear differential equations of second order (Matematisk Tidsskrift, B, no. 2, Kopenhagen 1927).

7. Analoge Figuren erhält man ebenfalls im allgemeinen Fall, wo die Anzahl der Elementarpolygone *unendlich* ist. Wo hier die Grenze zwischen dem parabolischen und hyperbolischen Fall geht, ist bisher noch nicht vollständig aufgeklärt worden. Ehe ich nun dazu übergehe, solche Sätze zu besprechen, welche über diese Fallunterscheidung Aufschluss zu geben vermögen, will ich betonen, dass die oben erklärte Darstellung, wenn sie auch für allgemeinere Flächenklassen als die oben betrachteten anwendbar ist, immerhin nicht für sämtliche einfach zusammenhängenden Flächen einwertiger Funktionen möglich ist. Wie aus den grundlegenden Arbeiten von *Iversen* und *Gross* hervorgeht, kann eine solche Fläche von überaus verwickelter Natur sein. Ich erinnere z. B. nur daran, dass *Gross* eine einwertige Funktion $z(w)$ vom parabolischen Typus konstruiert hat, deren Singularitäten jeden Punkt der w-Ebene als Projektionspunkt haben. Für die allgemeinsten Funktionen ist die Einteilung der Fläche in Fundamentalbereiche eine schwierige Aufgabe, welche in einer die Zwecke der Werteverteilungstheorie befriedigenden Weise kaum lösbar ist[4]).

3. Bestimmung der mittleren Verzweigtheit einer Riemannschen Fläche

8. Aus den oben betrachteten Beispielen geht schon hervor, dass die Frage, welcher von den zwei möglichen Fällen, der Grenzpunktfall oder der Grenzkreisfall, bei einer topologisch gegebenen Riemannschen Fläche vorliegt, in Zusammenhang mit der *Stärke der Verzweigtheit* der Fläche gebracht werden muss. Es scheint ein kritischer Grad der Verzweigtheit vorhanden zu sein, welche die zwei Typen voneinander trennt; auf der Seite der geringeren Verzweigtheit befinden sich die parabolischen, auf der Seite der höheren Verzweigtheit die hyperbolischen Flächen. Im folgenden sollen verschiedene Methoden zu einer zahlenmässigen Charakterisierung der Verzweigungsstärke einer Riemannschen Fläche besprochen werden.

Bei einer endlich vielblättrigen Fläche einer rationalen Funktion wird die gesamte Verzweigtheit am einfachsten bestimmt durch Angabe der gesamten Ordnung $\Sigma(\varrho - 1)$ der Verzweigungspunkte, sowie der Blätteranzahl n. Den Quotienten

$$V = \frac{1}{n} \Sigma(\varrho - 1),$$

d. h. die gesamte Ordnung der Verzweigungspunkte pro Blatt, nenne ich die *mittlere*

[4]) Dieser Frage hat *T. Shimizu* vor kurzem eine eingehende Untersuchung gewidmet (On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions, I, II, Japanese Journal of Mathematics, Vol. 8, S. 175—236, 237—304, 1931).

Die obige Darstellung der einfach zusammenhängenden Flächen gelingt für sämtliche Flächen, deren Windungspunkte sich auf eine Menge von Punkten projizieren, durch welche eine Jordankurve C gezogen werden kann, vorausgesetzt, dass jedes Exemplar des inneren, von C begrenzten Gebietes J an eine endliche Anzahl von Windungspunkten grenzt.

Verzweigtheit der Fläche. Nach der Riemannschen Formel ist $V = 2 - \frac{2}{n}$, und V strebt somit für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert 2.

Versucht man ein analoges Verfahren zur Bestimmung der mittleren Verzweigtheit einer *unendlich* vielblättrigen Fläche einzuschlagen, so kann dies offenbar nur so gelingen, dass man aus der Fläche zuerst eine Teilfläche abtrennt, die nur eine endliche Anzahl von Fundamentalbereichen (Blättern) enthält, und dann diese Teilfläche ausdehnt, so dass sie die gegebene Fläche ausschöpft. Es scheint a priori klar zu sein, dass das Ergebnis eines solchen Grenzprozesses von der Art und Weise abhängig sein wird, in welcher die Ausschöpfung vorgenommen wird. Es soll hier von zwei verschiedenen, naheliegenden Arten die Rede sein.

9. Die erste Methode beruht auf einer „kranzförmigen" Ausschöpfung der Fläche. Wir denken uns die Fläche F in Elementarpolygone zerlegt, wobei vorausgesetzt wird, dass jedes Fundamentalpolygon nur endlich viele Eckpunkte (jedes Blatt nur endlich viele Windungspunkte) hat, wie dies in sämtlichen oben betrachteten Beispielen der Fall ist; von jedem Knotenpunkt P des Elementarpolygons (welche Punkte ja die Fundamentalpolygone darstellen) gehen also immer *nur endlich viele* Zweige der Elementarpolygonfigur aus. Wir nehmen nun einen beliebigen Knotenpunkt P als Anfangspunkt (das Fundamentalpolygon der nullten Generation), fügen dann zu diesem sämtliche Knotenpunkte P hinzu, welche von P um *ein* Knotenintervall entfernt sind (Fundamentalpolygone der ersten Generation) usw. in infinitum. Um nun die mittlere Verzweigtheit der von den Knotenpunkten (Fundamentalpolygonen) der i ersten Generationen gebildeten Näherungsfläche F_i zu messen, kann man das bei einer rationalen Fläche zur Anwendung kommende Verfahren folgendermassen modifizieren. Jedem Elementarpolygon mit $2p$ Seiten entspricht ein Windungspunkt der Ordnung $p-1$ der gegebenen Fläche F. Die doppelte Ordnung $2p-2$ verteile ich nun auf die $2p$ Knotenpunkte, welche Eckpunkte des Elementarpolygons sind, indem jedem dieser Punkte der Verzweigungsbetrag

$$\frac{2p-2}{2p} = 1 - \frac{1}{p}$$

zuerteilt wird. Jeder Punkt P gehört zu mindestens zwei Elementarpolygonen; ich bezeichne die Summe

$$V_P = \Sigma\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

wo über sämtliche an P grenzende Elementarpolygone zu summieren ist, als die *Verzweigtheit* des Knotenpunktes P. Die *mittlere Verzweigtheit* V_i der Näherungsfläche F_i wird nun als das arithmetische Mittel der Verzweigtheit der zu F_i gehörigen Knotenpunkte P definiert:

$$V_i = \frac{1}{m} \Sigma V_P,$$

wo m gleich der Anzahl dieser Punkte P (und also = der doppelten Anzahl der in F_i enthaltenen Blätter) ist. Man sieht unmittelbar ein, dass diese Definition im Falle einer *rationalen* Fläche F_i mit der obigen Erklärung der mittleren Verzweigtheit übereinstimmt.

Durch eine Vertauschung der Reihenfolge der Summierung lässt sich die Verzweigtheit V_i auch folgendermassen bestimmen, was für die Folge von Bedeutung ist. Es sei $n = \frac{m}{2}$ die Blätteranzahl von F_i. Man berechne die Anzahl der über einem Punkt $w = a$, *innerhalb* F_i gelegenen Punkte der Fläche F. Diese Anzahl wird mit $n(a)$ oder $\bar{n}(a)$ bezeichnet, je nachdem ein über a gelegener algebraischer Windungspunkt $(p-1)$: ter Ordnung, der also an p verschiedene Blätter grenzt, hierbei *p-Mal* oder nur *einmal* mitgezählt wird; die logarithmischen Windungspunkte, welche ja *Randpunkte* der Flächen F und F_i darstellen, geben zu den Anzahlsfunktionen $n(a)$ und $\bar{n}(a)$ keine Beiträge. Es ist offenbar $\bar{n}(a) \leqq n(a) \leqq n$, wo Gleichheit für alle Werte a gilt, ausser für diejenigen (nach Voraussetzung *endlich* vielen) Punkte a, auf welche sich die Windungspunkte von F_i projizieren. Die Differenz $n(a) - \bar{n}(a)$ gibt die gesamte Ordnung der über $w = a$ liegenden *algebraischen* Windungspunkten von F_i an, während die Grösse $n - n(a)$ die Anzahl derjenigen Blätter von F_i bestimmt, welche an der Stelle $w = a$ an einem *logarithmischen* Windungspunkt grenzen. Die Summe

$$\sum_{(a)} [n - \bar{n}(a)] = \sum_{(a)} [n - n(a)] + \sum_{(a)} [n(a) - \bar{n}(a)], \tag{1}$$

wo über alle Werte a zu summieren ist, erhält nur von den *Windungspunkten* a positive Beiträge, und man sieht ohne weiteres ein, dass ihr Wert gleich dem halben Betrag der Verzweigtheitssumme ΣV_P ist, wobei das erste Glied rechts in (1) den Beitrag der logarithmischen, das zweite Glied den Beitrag der algebraischen Windungspunkte enthält. Die mittlere Verzweigtheit V_i lässt sich also durch folgende Ausdrücke darstellen:

$$V_i = \frac{1}{m} \sum_{(P)} V_P = \sum_{(a)} \left[1 - \frac{\bar{n}(a)}{n}\right] = \sum_{(a)} \left[1 - \frac{n(a)}{n}\right] + \sum_{(a)} \frac{n(a) - \bar{n}(a)}{n}.$$

Den Grenzwert

$$V = \lim V_i \qquad \text{für } i \to \infty$$

nenne ich die *mittlere Verzweigtheit* der gegebenen transzendenten Fläche F; falls dieser Grenzwert nicht existiert, kann nur von der „unteren" und der „oberen" Verzweigtheit der Fläche die Rede sein.

Die Verzweigtheit V lässt auch folgende geometrische Deutung zu: Man betrachte das dem Punkt P zugeordnete Fundamentalpolygon, das die den umgebenden Elementarpolygonen entsprechenden Windungspunkte als Eckpunkte hat. Einem Elementarpolygon mit $2\,p$ Seiten entspricht ein Winkel der Grösse $\frac{\pi}{p}$ des betreffenden Fundamentalpolygons (für $p = \infty$ setze man diesen Winkel gleich Null), und die Verzweigtheit $V_P = \Sigma\left[1 - \frac{1}{p}\right]$ gibt also den durch π dividierten Betrag der Summe der Supplementwinkel des Fundamentalpolygons P an, *eine Grösse, die bekanntlich* $\lesseqgtr 2$ *ist, je nachdem das Fundamentalpolygon als ein geradliniges Polygon der sphärischen, der euklidischen oder der Lobatschewskyschen Geometrie gedeutet wird.*

Gehen wir nun für ein Moment zu den *regulär* verzweigten Flächen zurück, so wissen wir ja, dass die Fundamentalpolygone in der angegebenen geometrischen Deutung im *parabolischen* Fall euklidisch, im *hyperbolischen* Fall lobatschewskysch sind. In der Tat stellt die oben besprochene Grösse $\Sigma\left[1 - \frac{1}{m_\nu}\right] \geqq 2$ nichts anderes als die oben eingeführte Verzweigtheit V_P eines Fundamentalpolygons dar. V_P hat also für die *regulär* verzweigten Flächen einen für alle P konstanten Wert, der mithin gleichzeitig die mittlere Verzweigtheit V der gesamten Fläche angibt, und der $\geqq 2$ ist, je nachdem der parabolische oder hyperbolische Fall vorliegt; für die Modulfläche ist z. B. $V = 3$.

Bei einer nicht regulären transzendenten Fläche variiert die Verzweigtheit V_P mit den Knotenpunkten P. Wenn die Fläche *endlich viele* Windungspunkte hat, so erhalten alle Knotenpunkte, ausser endlich vielen, die Verzweigtheit $V_P = 2$. Denn jeder Endpunkt P eines Elementarpolygons unendlicher Ordnung ($p = \infty$) erhält ja von diesem Polygon (Windungspunkt) den Verzweigungsbeitrag $1 - \frac{1}{p} = 1$; nun gehören fast alle der Punkte P zu *zwei* solchen Elementarpolygonen, und die Verzweigtheit V summiert sich also für diese Flächen (welche zum *parabolischen* Typus gehören) tatsächlich zu *zwei*.

Mittels der Riemannschen Formel lässt es sich zeigen, dass die oben definierte mittlere Verzweigtheit V einer transzendenten Fläche immer $\geqq 2$ ist. Das zuletzt Angeführte legt nun die Frage nahe: *Gehört den parabolischen Flächen immer der Wert $V = 2$, den hyperbolischen Flächen immer ein Wert $V > 2$ an?* Wenn dem so wäre, so könnte man sagen, dass *die Fundamentalpolygone einer Grenzpunktfläche im Mittel der euklidischen, einer Grenzkreisfläche im Mittel der Lobatschewskyschen Winkelgeometrie gehorchen.* Hierin würde speziell folgendes Kriterium enthalten sein: *Eine Fläche, deren Fundamentalpolygone P mindestens fünf Seiten haben, ist* *hyperbolisch*. Denn jedem Endpunkt eines solchen Polygons kommt nach obigem der Verzweigungsbetrag $1 - \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{2}$ zu; für ein Fünfeck ist also schon $V \geqq 5 \cdot \frac{1}{2}$, so dass im vorliegenden Fall tatsächlich $V \geqq \frac{5}{2} > 2$ wird.

10. Ehe ich zur Beantwortung dieser Frage übergehe, soweit dies gemäss dem gegenwärtigen Stand der Werteverteilungstheorie möglich ist, muss ich eine andere Methode zur Ausschöpfung einer Riemannschen Fläche besprechen, welche vom Standpunkt der Verzweigtheitsuntersuchung vielleicht weniger natürlich erscheint, die jedoch den Vorzug vollkommen allgemeiner Anwendbarkeit besitzt, während die auf kranzförmiger Ausschöpfung beruhende Messung der Verzweigtheit nur bei Flächen von relativ einfachem Aufbau gelingt.

Diese Methode, auf welche sich die meisten Untersuchungen der Werteverteilung gründen, besteht einfach darin, dass man das schlichte Existenzgebiet $|z| < R$ der Funktion $w(z)$, wo entweder $R = \infty$ oder $R = 1$, durch eine Schar konzentrischer Kreise $|z| < r < R$ ausschöpft. Die entsprechende über die w-Ebene ausgebreitete Bildfläche F_r eines solchen Kreises geht für $r \to R$ in die gegebene Fläche F der Funktion $w(z)$ über. In Analogie mit den oben besprochenen Bezeichnungen, führe man nun für jeden Wert a (auch $a = \infty$) die Anzahl $n(r, a)$ der über $w = a$ liegenden Punkte der Teilfläche F ein; diese Grösse ist also gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $w(z) = a$ im Kreise $|z| < r$, wobei jede Wurzel so oft gezählt wird, wie ihre Multiplizität angibt. Ein wichtiger, von *Littlewood* und *Ahlfors* herrührender Satz der Werteverteilungslehre besagt, dass für eine gegebene Funktion $w(z)$ fast alle Anzahlsfunktionen $n(r, a)$ von gleicher asymptotischen Grösse sind, indem die Integrale

$$N(r, a) \equiv \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{t} \qquad (2) \qquad (o < r_0 < r)$$

asymptotisch gleich dem Maximum $N(r) \equiv \max N(r, a)$ sind:

$$N(r, a) \sim N(r)$$

für alle Werte a, ausser für eine Punktmenge a vom Masse Null.

Ich bezeichne ferner mit $n(r, a)$ die Anzahl der Wurzeln von $w = a$ im Kreise $|z| < r$, indem jede Wurzel, ohne Rücksicht auf ihre eventuelle Mehrfachheit, jetzt nur *einmal* mitgezählt wird, und mit $n(r)$ das Maximum von $n(r, a)$, wobei alle Werte a ($a = \infty$ miteinbegriffen) berücksichtigt werden sollen. Die Grössen $n(r, a)$, $n(r, a)$, $n(r)$ haben also in bezug auf die Näherungsfläche F_r genau dieselbe Bedeutung wie die Grössen $\bar{n}(a)$, $n(a)$, n in bezug auf die Näherungsfläche F_i. Aus dem oben Gesagten geht also hervor, dass der Ausdruck

$$\theta(r, a) = 1 - \frac{\bar{n}(r, a)}{n(r)} = \delta(r, a) + \mu(r, a),$$

wo

$$\delta(r, a) = 1 - \frac{n(r, a)}{n(r)} \quad \text{und} \quad \mu(r, a) = \frac{n(r, a) - \bar{n}(r, a)}{n(r)},$$

als ein Mass der mittleren gesamten Ordnung der über $w = a$ liegenden Windungspunkte der Fläche F_r betrachtet werden kann, wobei die Grösse μ den algebraischen Windungspunkten entspricht, während die Grösse δ, wenigstens im Falle einer einfach aufgebauten Fläche, den von den über der Stelle $w = a$ gelegenen Windungspunkten unendlicher Ordnung gegebenen Beitrag zur Verzweigtheitsordnung darstellt.

Die unteren Grenzen

$$\theta(a) = \varliminf_{r \to R} \theta(r, a), \quad \mu(a) = \varliminf_{r \to R} \mu(r, a), \quad \delta(a) = \varliminf_{r \to R} \delta(r, a),$$

welche zwischen 0 und 1 variieren können (wobei $0 \leqq \mu + \delta \leqq \theta \leqq 1$), nenne ich bezw. *Index der totalen Verzweigtheit, Index der algebraischen Verzweigtheit, Defekt* des Wertes a, wobei also der Defekt, wenigstens in den einfachsten Fällen, die Rolle einer mittleren Ordnungszahl sämtlicher über dem Punkt a liegenden Windungspunkte unendlicher Ordnung spielt.[5]) — Damit die nachfolgenden Sätze für die allgemeinsten Funktionen gültig seien, müssen die Definitionen der Grössen θ, μ, δ so modifiziert werden, dass man überall die Anzahlsfunktionen n, $\bar{n}$ mit deren Mittelwerten N, $\bar{N}$ [vgl. (2)] ersetzt, was für Flächen von nicht allzu komplizierter Struktur keine Änderung in den Werten der zu definierenden Grössen nach sich zieht.

Auf Grund der obigen Erörterung ist es fast einleuchtend, dass die Werte der Ausdrücke

$$V = \lim \frac{1}{i} \sum_{(P)} V_P \quad \text{und} \quad \sum_{(a)} \theta(a)$$

für Flächen einfacher Natur einander gleich sein müssen, denn beide Ausdrücke definieren die nach analogen Prinzipien bestimmte Gesamtverzweigtheit der Fläche F; der Unterschied besteht (ausser in einer Vertauschung der Summierungsordnung) allein darin, dass in jenem Falle die Näherungsflächen F_i, in diesem die Flächen F_r der Bestimmung zugrunde gelegt wurden.

Dies stimmt auch exakt in bezug auf diejenigen Flächen, deren Verzweigtheit V weiter oben bestimmt wurde; man findet also für diese Flächen im parabolischen Fall $V = \Sigma\, \theta(a) = 2$, im hyperbolischen Fall wiederum $\Sigma\, \theta(a) > 2$.

Andererseits muss betont werden, dass die Werte V und θ für hinreichend komplizierte Flächen auch verschieden ausfallen können, und dass, wie bereits be-

[5]) Vgl. hiezu meine in Nr. 3 zitierten Vorlesungen, § 3, sowie *E. Ullrich:* Über die Ableitung einer meromorphen Funktion (Sitzungsber. der preuss. Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Klasse, B. 27, 1929).

merkt worden ist, die Grösse V sich überhaupt nur unter einschränkenden Voraussetzungen bestimmen lässt. Ich betrachte es als eine der wichtigsten Aufgaben der Werteverteilungslehre, diejenigen Flächen zu bestimmen, für welche $V = \theta$. Die meisten der bis jetzt bekannten Sätze dieser Lehre beziehen sich nämlich auf die Näherung durch die Flächen F_r, und es ist, um diese Sätze in ihrer Gesamtheit für die Verzweigtheitsforschung anwendbar zu machen, notwendig klarzulegen, wie sich die zwei Ausschöpfungsmethoden (F_r und F_i) zu einander verhalten. Die Lösung dieser schwierigen Aufgabe erfordert ein tiefes Eindringen in das Verhalten der Verzerrung bei der von einer einwertigen Funktion vermittelten Abbildung.

4. Sätze zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche

11. Ein allgemeiner Satz der Werteverteilungstheorie, den ich den *zweiten Hauptsatz* der Theorie der meromorphen Funktionen genannt habe, besagt, dass der letztbesprochene Zusammenhang zwischen Verzweigtheit und Typus einer Riemannschen Fläche in folgender modifizierter Form allgemeingültig ist:

Für eine Grenzpunktfläche verschwindet der Verzweigungsindex $\theta(a)$ für alle Werte a, ausser höchstens einer abzählbaren Wertmenge. Die Summe der positiven Werte von $\theta(a)$ ist höchstens gleich 2.

Andererseits gilt für eine Grenzpunktfläche nicht immer $\Sigma\, \theta(a) > 2$; es lässt sich nämlich eine durch die Wachstumsstärke der Anzahlsfunktion $n(r)$ [bezw. $N(r)$] charakterisierte Flächenklasse abgrenzen, welche zum hyperbolischen Typus gehört, obwohl die Verzweigtheit die kritische Grenze 2 nicht übersteigt; diese Flächen sind also schwächer verzweigt als sämtliche regulär verzweigten Grenzkreisflächen, bei denen, wie wir gesehen haben, immer $\Sigma\, \theta(a) > 2$ gilt. Die obige Vermutung über die Bedeutung des euklidischen, bezw. nichteuklidischen Charakters der Fundamentalpolygone als Indikator des Typus muss hiernach dahin modifiziert werden, dass die Bedingung $V > 2$, d. h. das Bestehen der nichteuklidischen Winkelgeometrie (im Mittel), eine *hinreichende* Bedingung für das Eintreffen des Grenzkreisfalles ist. Dies ist offenbar durch den zweiten Hauptsatz für diejenigen Flächen streng bewiesen worden, für welche $V = \theta$; dasselbe gilt aber aller Wahrscheinlichkeit nach auch, wenn $V \neq \theta$ (was, wie oben schon bemerkt wurde, für hinreichend kompliziert aufgebaute Flächen möglich ist; eine solche Fläche ist z. B. die Fläche der Funktion e^{e^z}, für welche $V = 2$, dagegen $\theta = 0$).

12. Aus dem zweiten Hauptsatz folgt insbesondere, dass der totale Defekt $\Sigma\, \delta$, vermehrt um die totale algebraische Verzweigtheit, den Wert 2 nicht überschreiten kann. Bemerkt man, dass der Defekt $\delta(a)$ den maximalen Wert 1 annimmt für jeden Wert a, den die Funktion $w(z)$ überhaupt nicht annimmt, so sieht man ein, dass die Defektrelation

$$\Sigma\, \delta\,(a) \leqq 2$$

den *Picard*schen Satz enthält, wonach eine für $|z| < \infty$ meromorphe Funktion höchstens zwei Werte a auslassen kann. Ausser solchen *Picard*schen Ausnahmewerten, welche also den maximalen Defekt $\delta = 1$ haben, kann eine Funktion $w\,(z)$ auch schwächere Ausnahmewerte, sog. *defekte Werte* aufweisen, die sie allerdings annimmt, jedoch so selten, dass die entsprechenden Defekte δ positiv ausfallen. Vom Standpunkt der Defektrelation sind nun diejenigen parabolischen Flächen von besonderem Interesse, für welche der totale Defekt $\Sigma\,\delta$ sein Maximum 2 erreicht. Die oben besprochenen Flächen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten gehören sämtlich zu dieser Klasse. Unter Anwendung dieser Fläche lässt sich eine meromorphe Funktion konstruieren, welche beliebig vorgegebene Werte $w = a_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, q)$ als defekte Werte hat, so dass die entsprechenden Defekte $\delta\,(a_\nu)$ vorgeschriebene rationale Werte vom Gesamtbetrag 2 erhalten.[6])

13. In bezug auf die über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche F hat der *Picard*sche Satz folgende Bedeutung: Ein Kreis $|w-a| \leqq \varrho$ heisse in bezug auf *F vollständig verzweigt*, falls die Fläche keine schlichte Kreisscheibe $|w-a| \leqq \varrho$ enthält; er heisse ferner vollständig verzweigt *mindestens der Ordnung* $p-1$, wenn die Fläche F keine aus einer Anzahl $q \leqq p$ solcher Kreisscheiben zusammengesetzte Teilfläche enthält; insbesondere heisse der Kreis vollständig verzweigt unendlich hoher Ordnung, wenn keine aus endlich vielen solchen Kreisscheiben bestehendes Flächenstück zur Fläche gehört. Wenn diese Eigenschaften bestehen, wie klein der Radius ϱ immer gewählt wird, so heisse *der Punkt* $w = a$ bezw. vollständig verzweigt; vollständig verzweigt mindestens der Ordnung $p-1$; vollständig verzweigt unendlich hoher Ordnung. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Punkt zu diesen Kategorien gehöre, ist bezw. dass die Gleichung $w\,(z) = a$ keine einfachen Wurzeln hat; dass diese Gleichung keine Wurzeln von niedrigerer Multiplizität als p hat; dass diese Gleichung überhaupt keine Wurzeln hat.

Der *Picard*sche Satz lässt sich also folgendermassen formulieren: Eine Grenzpunktfläche F besitzt höchstens zwei vollständig verzweigte Werte von unendlich hoher Ordnung. Vor kurzem hat *Ahlfors* einen neuen auf einer direkten Untersuchung der Verzerrung bei der von der einwertigen Funktion $z\,(w)$ vermittelten Abbildung fussenden Beweis des *Picard*schen Satzes gegeben, welcher zugleich diesen „Zweipunktsatz" zu einem „Zweikreissatz" erweitert[7]): *Eine Grenzpunktfläche enthält höchstens zwei ausserhalb einander liegende vollständig verzweigte Kreise unendlich hoher Ordnung.*

[6]) Die Bedeutung dieser Flächen für die Konstruktion defekter Werte ist zuerst von *Hille* erkannt worden (vgl. seine in Nr. 6 zitierte Arbeit).

[7]) *L. Ahlfors*, Sur une généralisation du théorème de Picard (Comptes rendus, t. 194, 1932, p. 245—247).

14. Aus dem zweiten Hauptsatz können noch allgemeinere Sätze über die vollständig verzweigten Punkte Riemannscher Flächen gefolgert werden. In der Tat ist für einen solchen Punkt a, mindestens $(p-1)$: ter Ordnung, stets $\bar{n}(r, a) \leqq \frac{1}{p} n(r, a)$, wo Gleichheit nur dann gilt, wenn die Fläche F über $w = a$ lauter algebraische Windungspunkte genau $(p-1)$: ter Ordnung hat. Es ist also dann $\theta(a) = \lim \left[1 - \frac{\bar{n}(r, a)}{n(r)}\right] \geqq 1 - \frac{1}{p}$; der zweite Hauptsatz ergibt mithin die Ungleichung

$$\Sigma\left(1 - \frac{1}{m_\nu}\right) \leqq 2$$

als notwendige Bedingung für eine Grenzpunktfläche, welche gewisse Werte $w = a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ als vollständig verzweigte Punkte mindestens der Ordnung $(m_\nu - 1)$ hat; ein Satz, den früher *Caratheodory* durch eine andere Methode bewiesen hat für den speziellen Fall, dass die Multiplizität jeder Wurzel der Gleichung $w(z) = a_\nu$ *genau ein Multipel* von m_ν ist.

Da für jeden vollständig verzweigten Wert $\theta(a) \geqq \frac{1}{2}$ ist, so schliesst man insbesondere:

Die Anzahl der vollständig verzweigten Punkte einer Grenzpunktfläche beträgt höchstens vier.

Die maximale Anzahl, vier, kommt bei der Fläche der $\wp$-Funktion vor, welche über vier Punkten a lauter Windungspunkte erster Ordnung hat, so dass die entsprechenden Verzweigtheiten $\theta(a) = \frac{1}{2}$ werden.

Der letzte *Vierpunktsatz* führt fast unmittelbar zu dem bekannten zweiten *Picard*schen Satz, der die Unmöglichkeit der Uniformisierung einer algebraischen Gleichung $f(x, y) = 0$ vom Geschlechte $p > 1$ durch zwei in der ganzen endlichen Ebene meromorphe Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ behauptet. Nach einer Bemerkung von *Hurwitz* lässt sich nämlich dieser Satz zurückführen auf den besonderen Fall einer hyperelliptischen Kurve $y^2 = (x - a_1) \ldots (x - a_\nu)$. Lässt sich nun diese Kurve durch die meromorphen Funktionen $x = x(t)$, $y = y(t)$ uniformisieren, so muss offenbar, da y eindeutig in t ist, $x(t)$ die Werte $a_1, \ldots, a_\nu$ als vollständig verzweigte Werte gestatten, und es ist somit nach dem Vierpunktsatz $\nu \leqq 4$, d. h. die Kurve ist höchstens vom Geschlechte Eins.

15. Vor einigen Monaten hat *Ahlfors* auch den Vierpunktsatz durch elementare Methoden der konformen Abbildung bewiesen, und ihn zugleich in derselben Weise wie den *Picard*schen Satz erweitert; dieser *Ahlfors*sche *Vierkreissatz* besagt[8]):

[8]) *L. Ahlfors*, Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes (Comptes rendus t. 194, 1932, p. 1145—47).

Eine Grenzpunktfläche enthält höchstens vier ausserhalb einander liegende, vollständig verzweigte Kreise.

Um die unwesentliche Sonderstellung des Punktes $w = \infty$ wegzuschaffen, empfiehlt es sich hierbei die Riemannsche Fläche sowie die Kreise auf der Riemannschen Kugel zu projizieren.

Wählt man auf der Kugel *fünf* beliebige Kreise $K_1, \ldots, K_5$ ausserhalb einander, so muss nach dem Vierkreissatz jede über der Kugel ausgebreitete Riemannsche Fläche vom parabolischen Typus mindestens *eine* unverzweigte, *schlichte* Kreisscheibe K_ν enthalten. Geht man wieder zurück zur w-Ebene, so folgt mit Rücksichtnahme auf die freie Wählbarkeit der fünf Kreise, dass der bekannte *Bloch*sche Satz, nach welchem die Fläche einer ganzen transzendenten Funktion eine schlichte Kreisscheibe von beliebig grossem Radius enthalten muss, ein unmittelbares Korollar des Vierkreissatzes ist.

16. Hiermit habe ich die wichtigsten heute bekannten *notwendigen* Bedingungen für das Eintreffen des parabolischen Falles durchmustert, insoweit diese im Zusammenhang mit dem *mittleren Verzweigtheitsgrad* der Fläche stehen. Ich erinnere noch an einen wichtigen, älteren Satz von *Gross*, der diese Bedingungen ergänzt, indem er eine Aussage über die maximale Verzweigtheit eines *einzelnen* Blattes der Fläche enthält: Man betrachte ein eindeutiges Element der einwertigen Funktion $z = z(w)$, welche eine Fläche F auf den Kreis $|z| < R$ schlicht abbildet, und setze dieses Element, von seinem Mittelpunkt $w = a$ ausgehend, längs einem Halbstrahl $\arg(w - a) = \varphi$ analytisch fort. Der Wert φ heisse singulär, wenn die Fortsetzung nicht bis zum unendlich fernen Punkt $w = \infty$ führt. Der *Gross*sche Satz besagt nun, dass die singulären Werte φ im Grenzpunktfalle ($R = \infty$) eine *Nullmenge* bilden.

17. Die Anzahl der Resultate, welche umgekehrt *hinreichende* Bedingungen für den Grenzpunktfall enthalten, ist bisher erst nur gering. Wie auf Grund der obenstehenden einleitenden Erörterungen zu erwarten ist, enthalten diese Sätze Aussagen folgender Art: wenn die Verzweigtheit hinreichend schwach ist, so ist der Typus parabolisch. Dies gilt z. B., wie bereits oben bemerkt wurde, für *jede Fläche mit endlich vielen Windungspunkten*. Die knapp bemessene Zeit gestattet nicht auf weitere, von *Speiser*, *Ahlfors* und dem Vortragenden[9]) erzielte speziellere Ergebnisse dieser Art hier näher einzugehen[10]).

[9]) Vgl. ausser der in Nr. 5 zitierten Arbeiten von *Speiser* noch *L. Ahlfors*, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche (Commentarii Math. Helvetici, Vol. 3, H. 2, 1931) und *R. Nevanlinna*, Ein Satz über die konforme Abbildung Riemannscher Flächen (wird in der Kongressnummer derselben Zeitschrift erscheinen).

[10]) Desgleichen muss ich auf eine Besprechung der interessanten Beziehungen verzichten, welche zwischen den asymptotischen Werten einer meromorphen Funktion und den transzendenten Singularitäten der inversen Funktion bestehen, zu welcher Frage wichtige Beiträge von *Hurwitz, Iversen, Gross, Denjoy, Carleman, Bieberbach* und *Ahlfors* geliefert worden sind.

18. Zum Schlusse möchte ich bemerken, dass die Werteverteilungstheorie, insbesondere der zweite Hauptsatz, keineswegs die hier gemachten einleitenden Bemerkungen über die Verzweigtheitsmessung einer Riemannschen Fläche zum Ausgangspunkt gehabt haben. Wenn ich dessen ungeachtet diese Bemerkungen teilweise heuristischer Natur an die Spitze meines Vortrags gestellt habe, so geschah dies nicht allein aus didaktischen Gründen; vielmehr bin ich der Ansicht, dass ein tieferes Verständnis der Probleme, welche sich um den *Picard*schen Satz gruppieren, nur auf Grundlage der Gesichtspunkte der Verzweigtheitsforschung gewonnen werden kann. In dieser Richtung, wo die Werteverteilungslehre in Kontakt mit den Problemen der allgemeinen Uniformierungstheorie gebracht wird, sind der funktionentheoretischen Forschung noch grosse Aufgaben vorbehalten.

Auch nach anderen Richtungen hin sind im Laufe der letzten zehn Jahre durch die wichtigen Untersuchungen von *Julia*, *Montel*, *Valiron*, *Ostrowski*, *Milloux*, *Saxer* u. a. in der Werteverteilungslehre bedeutungsvolle Fortschritte erzielt worden. Da indessen diese Ergebnisse in keiner so engen Beziehung zur Verzweigtheitsforschung stehen, wie die oben besprochenen Sätze, so bin ich auf sie hier nicht eingegangen. Ich darf übrigens vermuten, dass die besagten Ergebnisse im Vortrag von Herrn *Valiron*, dem führenden Forscher auf diesen Gebieten, einer eingehenderen Diskussion unterzogen werden sollen.

L'aspect analytique du problème des figures planétaires

Par Rolin Wavre, Genève

Aristote déjà s'occupait de la figure de la terre et prouvait sa sphéricité par raison de symétrie. A l'époque moderne, j'entends depuis Newton, la question de la forme que peuvent revêtir les astres fluides n'a cessé de préoccuper le monde savant. La liste de ceux qui s'en sont occupés est l'une des plus admirables puisqu'elle compte au siècle passé: Newton, Clairaut, d'Alembert, Laplace, plus récemment Darwin, Lord Kelvin, Poincaré, Liapounoff et de nos jours MM. Volterra, Cartan, Jeans, Lichtenstein.

C'est un livre entier qu'il faudrait écrire pour retracer dignement l'historique de la question et caractériser les étapes de cette lutte où tant d'esprits de premier ordre se sont efforcés d'arracher à la nature un de ses secrets les plus profonds.

Mon but est beaucoup plus restreint, plus proportionné au temps dont je dispose. Je voudrais simplement préciser quelques mises en équations du problème des figures d'équlibre des masses fluides hétérogènes, comparer ces équations à celles que l'on rencontre dans d'autres domaines et ainsi, vous devinerez dans quelle mesure la question est à la portée de nos instruments mathématiques et par quel côté, d'autre part, elle paraît dépasser les ressources actuelles de l'analyse; car ce problème n'est pas de ceux que l'imagination créatrice nous enjoint à nous poser, c'est la nature qui nous l'impose.

Commençons par quelques définitions. Envisageons une masse fluide hétérogène. Par structure, j'entends simplement la répartition de la matière. Les isostères seront les surfaces d'égale densité. La stratification sera la famille des isostères considérée au point de vue géométrique, la loi des densités sera la distribution des densités sur ces différentes surfaces. Enfin, par aspect analytique, qu'entendons-nous? Une sorte d'invariant situé au delà des descriptions symboliques par lesquels un problème peut se traduire, au delà de la mise en équation. Ainsi, le mouvement d'un point matériel dans un champ donné peut s'exprimer par les équations différentielles ordinaires, comme aussi par l'équation de Jacobi ou encore par le principe d'Hamilton. Une transcription analytique n'exclut donc jamais une traduction dans un autre langage, au premier abord très différent. Cette équivalence des points de vue est d'ailleurs une des sources les plus fécondes du progrès de la science. Les exemples dent et je n'ai pas besoin de vous les rappeler.

Ces précautions prises, partons du problème des n corps qui s'écrit, les notations se comprennent d'elles-mêmes, sous la forme d'équations différentielles ordinaires ou d'équations équivalentes:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad W = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Si, ensuite, avec M. Lichtenstein, on passe à la dynamique des millieux continus mais „incohésifs", c'est-à-dire sans pression et sans friction, irréels, mais très attachants au point de vue mathématique, le système précédent est remplacé par des équations intégro-différentielles

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U = \int \frac{\varrho}{r} d V.$$

Enfin, si l'on prend en considération les pressions en négligeant les frottements, on trouve le système de l'hydrodynamique, point de départ de la théorie des figures planétaires

$$(1) \qquad \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d^2 x}{d t^2}, \quad U = \int \frac{\varrho}{r} d V.$$

Ces relations qui régissent le mouvement des astres fluides, nous pouvons les écrire, c'est déjà quelque chose, et sous une forme très simple; mais cette simplicité n'est qu'apparente, car le potentiel newtonien qui se lit U est une fonctionnelle, plus exactement une transmuée, dont la dépendance à l'égard de la structure du fluide est tellement complexe qu'elle fait obstacle à une description, en termes finis, des figures planétaires. Elle commande en général l'emploi des méthodes dites d'approximations successives dont le maniement est d'ailleurs, sur ce terrain, extrêmement délicat. Si fouillées, en effet, que soient de nos jours les propriétés générales du potentiel newtonien, quant à la continuité, la dérivabilité, l'analyticité même, etc., le comportement explicite de U, son calcul effectif, n'est possible que pour quelques corps simples, les ellipsoïdes homogènes par exemple.

Ce qui caractérise ensuite le système précédent, c'est que le champ de force qui provient de l'attraction réciproque des particules est inconnu en même temps que le volume V dans lequel on va être conduit à opérer; c'est donc le domaine d'intégration qu'il s'agit de déterminer. Est-ce pour cette raison que l'étude des figures planétaires ne laisse pas de décevoir les analystes accoutumés à ne raisonner que sur des domaines bien déterminés, donnés? Je l'ignore. Mais il n'y a pas, que je sache, de recherches plus dignes de passionner ceux qui pratiquent le calcul fonctionnel.

Un genre de solution des équations (1) doit être mis à part et signalé en premier lieu, car ces solutions échappent dans une large mesure à la recherche de la structure de l'astre. Ce sont les rotations permanentes de M. Dive. Pour trouver des solutions rigoureuses des équations (1) il se donne une stratification de révolution autour d'un axe de rotation et détermine de quelle vitesse il faut animer les diverses particules pour que le fluide conserve sa structure initiale. L'on trouve l étant la distance à l'axe et ω la vitesse angulaire

$$\omega^2 = \frac{1}{\varrho l}\left[\int_{\varrho}^{\varrho_1} \frac{\partial U}{\partial l}\, d\varrho - \varrho_1 \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_{\varrho_1}\right]$$

en coordonnées ϱ et l; l_1 est la densité sur la surface libre. La structure n'est plus astreinte qu'à de certaines inégalités provenant par exemple du fait que la pression doit rester positive ainsi que le carré de la vitesse angulaire. M. Dive prouve que certaines stratifications ellipsoidales ou annulaires donnent lieu, en toute rigueur, à de telles rotations permanentes. Si l'on s'impose une condition supplémentaire, $\varrho = f(p)$, ou encore l'obligation pour le fluide de tourner tout d'une pièce, comme dans les figures d'équilibre, alors, il y a à proprement parler un problème de structure à résoudre et les difficultés signalées plus haut surgissent. L'existence d'une relation entre la densité et la pression entraînerait l'existence d'un potentiel des accélérations A et les équations (1) se réduiraient à une seule, la fonction Φ, potentiel de la pesanteur, devant garder la même valeur sur les différents isostères

(2) $$\Phi(\varrho) = U - A.$$

Si l'astre tourne tout d'une pièce, l'équation précédente s'écrit

(2^1) $$\Phi(\varrho) = U + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

C'est sur ce dernier problème, j'entends celui des figures d'équilibre, que nous allons maintenant porter notre attention, et à trois reprises, en nous occupant 1° des travaux de l'école de Leipzig, 2° d'une extension de la méthode de Laplace, 3° du problème aux limites.

1° Voyons à l'œuvre une des méthodes d'approximations successives que M. Lichtenstein a pratiquée avec grand succès, c'est la plus séduisante parce que la plus directe.

Elle consiste à partir d'une structure initiale créant un potentiel U_0, d'où l'on déduit Φ_0, puis à déterminer les surfaces S_0 à Φ_0 constant, à les charger d'une densité ϱ_1, ce qui donne un nouveau potentiel U_1, puis une nouvelle fonction Φ_1, les surfaces S_1 à Φ_1 constant sont chargées d'une densité ϱ_2 et ainsi de suite. La difficulté réside dans la preuve de la convergence des familles S_n vers une stratification limite, laquelle, si elle existe, fournirait une solution du problème. Pour favoriser cette convergence, l'on reste maître de choisir la loi des densités ϱ_{n+1} dont sont chargées les surfaces S_n. Le choix de la configuration de départ a naturellement une importance primordiale. En l'absence de conditions jouant le rôle de celle de Lipchitz dans la théorie des équations différentielles, la démonstration de la convergence fait intervenir quelques propriétés très cachées et très fines du potentiel newtonien. Malgré ces difficultés, M. Lichtenstein est parvenu par cette méthode à prouver rigoureusement l'existence de figures hétérogènes composées de deux masses distinctes ayant un point et un seul en commun. La configuration de départ était constituée par deux masses ponctuelles. M. Marhun a montré récemment que la figure ainsi trouvée appartient à une série linéaire allant d'un corps unique à deux masses complètement séparées suivant le processus dont Poincaré et Darwin affirmaient l'existence pour les masses homogènes.

Examinons maintenant le point de vue de M. Lichtenstein dans la question de l'existence des figures voisines de figures données, recherches introduites par Liapounof et Poincaré. L'essentiel, suivant Liapounof, est d'obtenir un développement de l'accroissement du potentiel en série dont les termes seront d'un ordre infinitésimal de plus en plus élevé lorsque la seconde figure tendera vers la première. M. Lichtenstein montre que la distance ζ comptée sur la normale entre les deux surfaces libres des figures homogènes voisines est régie par une équation intégro-différentielle non linéaire que j'écris très symboliquement

$$g\,\zeta + \int \frac{\zeta}{r}\,dS = \pi\left(s, \zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \frac{\partial \zeta}{\partial v}\right).$$

La fonction π vers zéro avec le paramètre s dont dépendent les figures dérivées et S est la surface libre du fluide.

Dès lors, deux circonstances sont possibles:

a) l'équation homogène

$$g\,\zeta + \int \frac{\zeta}{r}\,dS = 0$$

n'admet pas de solution, alors l'existence d'une série linéaire, et d'une seule dans le voisinage de la figure donnée est assurée.

b) Elle admet une solution au moins et alors la figure donnée est à la bifurcation de deux ou plusieurs séries linéaires. Il faut faire abstraction dans cet énoncé de la solution identiquement nulle et de solutions banales résultant d'un simple déplacement d'ensemble du fluide envisagé. L'étude de la bifurcation a été l'objet d'une très belle thèse récente de M. Hölder.

Le pont est ainsi jeté avec la théorie des équations intégrales. Cette méthode admet diverses extensions qui en augmentent considérablement la portée. Elle s'applique encore aux cas où la configuration donnée n'est qu'approximativement une figure d'équilibre. Les beaux résultats de M. Lichtenstein sur les étoiles doubles, l'anneau fluide sans corps central; les travaux de ses disciples: de M. Garten sur les figures de Roche, de MM. Garten et Marhun sur les anneaux séparés tirent parti de cette dernière remarque. Grâce à l'obligeance de M. Lichtenstein qui a bien voulu me communiquer les épreuves d'un article très important qui va paraître, je puis annoncer que cette méthode s'étend encore à la détermination des figures faiblement hétérogènes voisines d'une figure homogène, ou des figures hétérogènes, voisines d'une stratification sphérique.

Les questions de stabilité font intervenir la recherche des minima de certaines expressions contenant l'énergie potentielle de l'astre:

$$\frac{1}{2}\int\int\frac{\varrho\,\varrho'}{r}\,d\,V\,d\,V'$$

fonctionnelle de V, qui ne ressortit à aucune des méthodes classiques du calcul des variations. Mais on sait que des propriétés d'extrema sont liées aux valeurs propres des équations intégrales; ce fait s'interprête ici de la manière la plus simple. Si les fréquences ν_n d'une équation intégrale analogue à la précédente

$$g\,z+\nu\int\left(\frac{1}{r}+\mathrm{R}\right)z\,d\,S=0$$

sont toutes supérieures à l'unité, il y a stabilité de la figure donnée S. Il y a instabilité si $\nu_1 < 1$. La stabilité des séries linéaires peut s'échanger, comme Poincaré l'a montré, aux figures de bifurcation. Ainsi, j'espère vous avoir fait pressentir la profondeur des travaux de l'école de Leipzig en même temps que l'élégance de ce rattachement du problème des figures dérivées à la théorie des équations intégrales.

2° Je montrerai maintenant quels progrès ont été réalisés ces derniers temps dans la voie où Laplace s'est engagé par l'emploi direct des développements de Legendre de l'inverse de la distance

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{R'}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R'}\right)^{q}X_q\,(\cos\gamma)\qquad\qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{R}\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{R'}{R}\right)^{q}X_q\,(\cos\gamma).$$

Ces développements ne convergent que si le rapport des distances est inférieur à l'unité. Leur substitution dans l'expression du potentiel exigerait que l'on divisât au préalable la masse fluide par une sphère passant au point potentié P, pour n'employer le premier qu'à l'intérieur de cette sphère, le second qu'à l'extérieur, mais cette sphère n'étant pas d'égale densité ce procédé conduirait à des difficultés que tous ceux qui ont poursuivi des recherches dans la théorie du potentiel connaissent bien. En fait, Laplace intègre les développements précédents comme si l'isostère passant par P était sphérique; ce faisant, il intègre des séries divergentes. Poisson, Tisserand, puis Liapounof ont relevé la difficulté, et pour y parer, le savant russe modifie le développement de l'inverse de la distance, en posant, tout d'abord,

$$R=\jmath\,(1+e)$$

et développe $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de e, avec une condition de la forme $|e| < 1$.

Or il est possible d'utiliser directement le premier développement, car il existe une relation fonctionnelle équivalente à l'équation fondamentale entre les potentiels et qui ne donne prise à aucune objection de ce genre. Elle s'écrit

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS+\int\frac{\varrho}{r}\,dZ=\Phi_s+A+\frac{1}{4\pi}\int\frac{\triangle A}{r}\,dc$$

S est une surface d'égale densité quelconque, Z la zone comprise entre S et la surface libre, C le noyau intérieur à S et enfin Φ_s la valeur de Φ sur S. Cette équation fonctionnelle devra être satisfaite par une fonction régulière Φ quel que soit le point potentié intérieur au noyau et quel que soit le noyau lui-même. Quoique d'apparence compliquée elle présente un intérêt tout à fait manifeste. Le potentiel du noyau ne figure plus, il est compensé par une couche de niveau étalée sur S et un terme correctif dépendant du laplacien des accélérations. Le noyau devient ainsi une cavité vide de toute matière attirante. Les deux membres de la relation pris isolément, représentent, on le reconnaît facilement, des fonctions harmoniques dans la cavité. Il suffira d'identifier leur développement en polynomes harmoniques au voisinage d'un point pour satisfaire à l'équation elle-même par prolongement analytique; les figures pourront être aussi éloignées que l'on voudra des sphères primitives. Pour les petits mouvements d'un fluide incompressible, le potentiel des accélérations est nul $\triangle A = o$ et le dernier terme disparaît. Pour les figures d'équilibre, l'on a $\triangle A = -2\,\omega^2$ et la dernière intégrale se calcule en subdivisant la cavité en une sphère s de mêmes pôles que C et une marge C^+ qui ne recouvre en aucun cas le centre de l'astre. L'équation s'écrit, j étant le rayon de s et Θ la colatitude

$$\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn}\,dS+\int\frac{\varrho}{r}\,dZ+\frac{\omega^2}{2\pi}\int\frac{1}{r}\,dc^+=\Phi(j)-\omega^2 j^2-\frac{\omega^2}{3}X_2(\cos\Theta).$$

On peut laisser le point argument au voisinage du centre, tandis que le point qui balaye s, z et c^+, reste à une distance supérieure à un nombre positif.

Puis on procédéra à l'identification de toutes les puissances du rayon vecteur du point argument ce qui donne un tableau fondamental

$$(3)\qquad [q, R, \Phi]_q=\begin{cases} M & \text{si } q=-1\\ \Phi & q=0\\ \dfrac{5}{3}\,\omega^2 X^2(\cos\Theta) & q=2\\ 0 & q=1,3,4\ldots\end{cases}$$

dans lequel le crochet représente une certaine expression dépendant de l'entier q, du rayon vecteur R des surfaces S et de Φ. Quant à l'indice inférieur q il signifie que l'on ne prend que la fonction sphérique d'ordre q du développement du crochet. Les équations relatives à $q = 0, 1, 2, 3 \ldots$, représentent encore la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation fondamentale entre les potentiels soit satisfaite. Tandis que l'équation relative à l'indice -1, la première de la suite, n'est autre que l'équation de Poincaré bien connue. Ce système est encore absolument rigoureux, j'entends qu'aucune approximation n'a été faite et que toute difficulté de convergence du développement de l'inverse de la distance a pu être évitée. On peut facilement éliminer la fonction Φ et former d'autres conditions nécessaires, rigoureuses, ne faisant intervenir que le rayon vecteur R des surfaces d'égale densité.

Pour l'étude des figures voisines, on posera $R = R^{+} + \delta R$ et le tableau (3) régira l'accroissement du rayon δR.

Pour les sphéroïdes, on posera, dans le système (3)

$$R = j\,(1 + e), \qquad e = \Sigma\, \omega^{2n}\, e^{(n)}.$$

L'on trouve ainsi un système analogue à celui de Liapounof

$$|e_q^{(n)}| = -[q, R_{n-1}, \Phi_{n-1}]_q\ ;$$

les indices $n-1$ représentent le résultat de la $n-1$-ième approximation et les équations précédentes déterminent les coefficients $e_q^{(n)}$ de la n-ième. L'équation de Clairaut relative à la variation de l'aplatissement des différentes couches s'écrit simplement

$$|e_2^{(1)}| = \text{constante.}$$

On sait depuis Hipparque que l'axe polaire terrestre se déplace par rapport aux étoiles. Ce mouvement de précession est dû à l'attraction que le soleil et la lune exercent sur le renflement équatorial comme Newton l'avait pressenti, comme d'Alembert l'a démontré. Mais à la fin du siècle dernier, il semblait y avoir désaccord entre les mesures géodésiques de l'aplatissement et les mesures précessionnelles. Poincaré a souligné ce fait et l'illustre savant allait jusqu'à se demander s'il ne fallait pas renoncer à l'hypothèse primordiale de la fluidité du globe terrestre dans son ensemble, ce qui rendrait inapplicables à la terre les résultats tirés de la théorie des figures d'équilibre, Or, le calcul effectif, par la méthode précédente, des termes de l'ordre de la quatrième puissance de la vitesse angulaire que l'on négligeait au siècle dernier, permet de se convaincre qu'il y a au contraire accord, dans l'hypothèse de la fluidité, entre les trois ordres de mesure suivants

a) les mesures de l'aplatissement par la triangulation;
b) les mesures de pesanteur faites au pendule;
c) les mesures précessionnelles.

L'hypothèse de la fluidité est donc celle qui paraît la plus vraisemblable. En plus, l'étude méthodique de la seconde approximation permet de compléter plusieurs formules utiles pour la géodésie. Ce procédé s'applique naturellement aux petites vibrations des astres fluides, libres ou contraintes, notamment au cas de deux fluides parfaits superposés. Enfin, le mouvement zonal que présentent le Soleil, Saturne et Jupiter d'un fluide à relation $\varrho = f\,(p)$ peut être traité par la méthode précédente. M. Jardetsky y applique aujourd'hui la méthode de M. Liapounof.

3° Passons au troisième point et envisageons le problème des figures planétaires à la lumière des problèmes aux limites. Ce qui le différencie des problèmes habituels de l'hydrodynamique, c'est le fait qu'aucune frontière, aucune partie de frontière n'est donnée. Cependant, une certaine analogie existe. Pour ne point décevoir les analystes dont nous parlions plus haut, je supposerai tout d'abord connues: la surface libre du fluide, la masse totale et la vitesse angulaire, et c'est à un travail d'auscultation au sens médical des astres que je vous convie. Alors, un théorème de Stokes permet d'affirmer que le potentiel newtonien est hors de l'astre entièrement déterminé. Il détermine à son tour la fonction Φ à l'extérieur ainsi que la dérivée normale $g = \frac{d\,\Phi}{d\,n}$ sur la surface libre, g n'est autre que la pesanteur. L'opérateur de Laplace appliqué à l'équation (2) donne $\Delta\,\Phi = -4\,\pi\,\varrho + 2\,\omega^2$, mais ϱ est une fonction de Φ et cette équation s'écrit $\Delta\,\Phi = \Gamma\,(\Phi)$. Dès lors, la répartition des densités dans l'astre sera connue si l'on sait résoudre le problème suivant: Déterminer deux fonctions $\Phi\,(x, y, z)$ et $F\,(\Phi)$ telles que l'on ait, dans un domaine donné:

$$\Delta\,\Phi = f\,(\Phi) \tag{4}$$

avec, aux limites, la condition de Dirichlet et celle de Neumann

$$\Phi = h \quad \frac{d\,\Phi}{d\,n} = g. \tag{5}$$

Dans son remarquable ouvrage „Astronomy and Cosmogony" M. Jeans affirme sans démonstration complète, que les éléments stokiens et l'équation caractéristique du fluide déterminent d'une manière univoque la répartition des matières à l'intérieur de l'astre. Interprétée comme nous venons de le faire, la proposition devient peut-être plus vraisemblable encore, car l'équation caractéristique $\varrho = f\,(p)$ ferait connaître la fonction $f\,(\Phi)$ et les deux conditions aux limites seraient en général incompatibles, celle de Dirichlet suffisant à assurer l'unicité de la solution, si le fluide est peu compressible, d'après les profonds travaux de M. E. Picard.

Formulé dans ce langage le problème général s'énoncerait ainsi:

Déterminez à la fois la surface S, les fonctions Φ et F de manière à satisfaire à l'équation (4), avec les conditions aux limites (5), les fonctions h et g étant elles-mêmes déterminées à partir de S par la résolution d'un problème extérieur de Dirichlet.

De quelque côté qu'on l'aborde, le problème des figures planétaires apparaît comme d'un ordre plus élevé que ceux auxquels les traités d'analyse nous ont accoutumés.

Voici enfin quelques propositions particulières. Le théorème de Stokes peut être généralisé: l'attraction d'un astre régi par les équations (1), est, à l'extérieur, entièrement déterminée par la masse totale et le mouvement de la surface libre. La question de savoir si plusieurs structures sont mathématiquement possibles devient un problème de corps potentiellement équivalents, c'est-à-dire de corps qui engendrent la même attraction dans une certaine région de l'espace; sujet très actuel. MM. Dive et Nikliborc ont tout d'abord démontré qu'un ellipsoïde et un corps quelconque ne peuvent pas créér le même potentiel dans leur partie commune sans coïncider complètement. MM. Dive, Vasilesco et moi-même avons démontré ensuite que cette question se rattache aux potentiels newtoniens générateurs de fonctions harmoniques multiformes.

Sans avoir la prétention d'être complet, je dirai encore que M. Nikliborc a montré que la limite de la vitesse angulaire donnée par M. Crudeli $\omega^2 < \pi \varrho_{\text{moy.}}$ est vraie pour toute figure d'équilibre, quelle qu'en soit la forme.

Un théorème de la plus haute importance, celui de M. Lichtenstein, démontré également par M. Plancherel, résout un certain nombre de questions préjudicielles. Il affirme que toutes les surfaces d'égale densité admettent un même *plan de symétrie* droite, perpendiculaire à l'axe de rotation, et lieu des milieux de toutes les cordes de ces surfaces, parallèles à l'axe. De cette proposition découle de nombreux corollaires: si le fluide se répartit en plusieurs masses, elles doivent être à côté les unes des autres, j'entends étalées dans le plan équatorial; la pesanteur ne peut être nulle et les surfaces de niveau irrégulières que dans ce plan; ce qui facilite considérablement l'étude du problème principal. En plus, si l'astre est immobile, il doit admettre un équateur relativement à toute direction, il est donc composé de sphères concentriques. L'existence d'un plan de symétrie est encore assurée dans le cas plus général où le potentiel des accélérations ne dépend que de la distance à l'axe: $A\ (l)$.

Une étude des figures planétaires, dès l'abord plus approfondie, aurait évité aux géodésiens bien des mécomptes. La géologie, aussi, se pose de nos jours des problèmes où la terre dans son ensemble paraît devoir intervenir, déplacements ou oscillations des continents, migrations polaires, courants intratelluriques, qui exigent une étude plus générale du mouvement des astres fluides. L'édification d'une géodynamique vraiment cohérente à laquelle s'attaque M. Dive où l'on démontrerait que l'hypothèse primordiale de la fluidité du globe n'exclut pas les propriétés élastiques requises par la sismologie, rendrait aux sciences naturelles un service inappréciable. L'essentiel serait de trouver un système d'équation rendant compte de tous les effets observables à cette échelle. Ce ne seraient pas forcément les équations de Navier.

Mais n'était-il pas trop tard pour traiter d'un sujet aussi ancien que celui des figures planétaires dans cette maison où la physique mathématique s'est orientée sous les plumes d'Einstein et de Weyl vers cette perspective grandiose qu'est la gravifique relativiste?

Non, il n'était pas trop tard, car si enthousiasmé que l'on soit par l'aspect philosophique des disciplines nouvelles, le monde scientifique en général a encore beaucoup à attendre de la mécanique céleste classique.

Some problems in topology

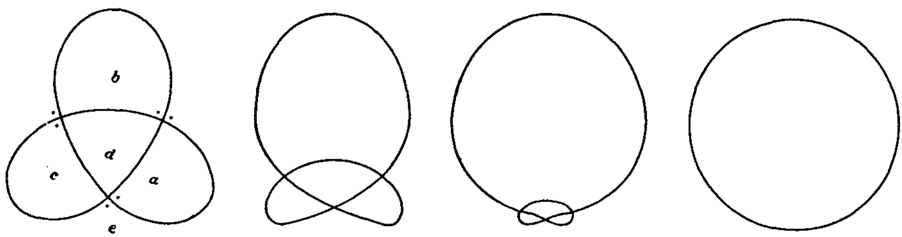
By J. W. Alexander, Princeton, N. J.

Broadly speaking, we may say that *analysis situs*, or *topology*, deals with the properties of geometrical figures that remain invariant when the figures are subjected to arbitrary continuous transformations. There are, however, several distinct kinds of analysis situs, because there are several distinct ways of interpreting the physical notion of continuity in mathematical language. For example, there is what we call *point theoretical* analysis situs which is different in spirit as well as in content from the sort of analysis situs originally proposed by Leibnitz. This branch of the science is essentially an outgrowth of function theory, whereas what Leibnitz had in mind was a new and independent type of mathematics, especially designed to avoid the complications of function theory and to deal directly with the purely qualitative aspects of geometrical problems. No doubt *combinatorial* analysis situs is more nearly a development of Leibnitz's original idea.

The vogue for point theoretical analysis situs seems to be due, in large part, to the predominating influence of analysis on mathematics in general. Nowadays, we tend, almost automatically, to identify physical space with the space of three real variables and to interpret physical continuity in the classical function theoretical manner. But the space of three real variables is not the only possible mathematical model of physical space, nor is it a perfectly satisfactory model for dealing with certain types of problems. Whenever we attack a topological problem by analytic methods it almost invariably happens that to the intrinsic difficulties of the problem, which we can hardly hope to avoid, there are added certain extraneous difficulties in no way connected with the problem itself, but apparently associated with the particular type of machinery used in dealing with it. Consider, for example, our old friend, the problem of the knotted string. In physical terms, what we have is this. We take an ordinary piece of string, tangle it up in an arbitrary manner, and seal its two ends together. We then ask ourselves whether we have really tied a knot in the string or whether the twists can all be disentangled without breaking the seal that holds the ends together. Now, to solve this problem it is evidently immaterial to know the exact shape of the string. We merely need to know something about the way in which the various branches lace over and under one another, all of which can be described with sufficient accuracy by a rough picture (fig. 1a), with some device (such as the system of dots shown in the figure), to distinguish the ,,upper" from the ,,lower" branch at each apparent crossing point. Moreover, all the really essential features of the knot picture may in turn be described by a table, or matrix: in this case, the matrix

a	b	c	d	e
1	−1	0	1	−1
0	1	−1	1	−1
−1	0	1	1	−1,

where each row is associated with an apparent crossing point, and where the signs of the terms in the row determine the „upper" and „under" branches at the point in question. In other words, the problem of the knotted string is essentially a combinatorial one, reducible to a problem in the manipulation of matrices. We might, however, be tempted to attack the problem analytically; for example, we might represent the string by a simple closed curve and ask ourselves whether or not the curve could be deformed into a circle without acquiring a multiple point at any stage of the process. Unfortunately, this would, at once, introduce all the complications associated with the mathematical notion of a simple, closed curve, some of which are so clearly brought into evidence by the well known curve of Antoine. Worse than this, unless special precautions were taken, the analytic procedure would lead to an incorrect mathematical formulation of the problem. For it is easy to see that every sufficiently smooth simple, closed curve can be deformed continuously into a circle without ever acquiring a multiple point, even though the curve may be one which



a b c d

Fig. 1

ought to be regarded as knotted. In figure 1, for example, we have a series of self-explanatory diagrams showing a trefoil knot in the process of being deformed into a circle. It will be noticed that the curve acquires no multiple point even at the moment when it becomes a circle. The moral of all this is that it is often better to avoid the artificial subtleties of analysis by using a more simple minded type of machinery.

In view of the above remarks, I am going to speak about three different kinds of analysis situs and to bring out, as far as I can, their relation to one another.

At one extreme, there will be *point theoretical* analysis situs, in which a space is regarded as a set of points, in which the structure of the space is expressed in terms of the notion of limit point, and in which a continuous transformation is merely a transformation preserving limit points. In this theory, two spaces are *homeomorphic* if there exists a one-one bi-continuous point transformation between them preserving limit points. At the other extreme will be *combinatorial* analysis situs, in which a space is not regarded as a set of points at all, but as something which may be cut up into a mosaic, or *complex*, of blocks called *cells*. These cells are not sets of points but primitive undefined entities. In the applications to physical geometry they will ordinarily represent „chunks" of space. Two complexes are *congruent* if there exists a one-one correspondence between the cells of the first and the cells of the second such that the correspondence preserves incidence relations between pairs of cells. The notion of a continuous transformation between two complexes is arrived at in some such way as the following. Certain operations are defined which allow us, according to specified rules, of course, to replace a cell of a complex by a cluster of inter-related cells or a cluster of inter-related cells by a single cell[1]).

These operations represent the abstract formulation of the physical operation of cutting up a portion of space into smaller pieces or of amalgamating a number of smaller pieces to form a larger one. Two complexes A and B are *equivalent* if we can transform the complex A into a complex A' congruent to B by a sequence of operations of the type allowed. The notion of equivalence plays a similar role here to the notion of homeomorphism in point theoretical analysis situs. Finally, there is a third type of analysis situs, which I shall call *flat* analysis situs, and which will serve as a sort of connecting link between the other two types. Here again, we shall be dealing with complexes of cells, but the cells, instead of being undefined abstractions, will be ordinary simplexes in the sense of analytic geometry. An allowable transformation of a complex will be one in which each simplex is cut up in an arbitrary manner into smaller ones, and two complexes A and B will be flat homeomorphic if they can be cut up into two complexes A' and B' such that these last two are congruent. The significance of flat homeomorphism in terms of general continuous transformations is obvious. If the complexes A and B are flat homeomorphic, the correspondence between the cells of A' and B' determines a one-one transformation between the points of A and of B which is not only continuous but *linear in patches* (more specifically, linear over each cell of A' and B'). It is easy to verify that, conversely, if a one-one transformation, linear in patches, exists between the points of A and of B then A and B are flat homeomorphic.

[1]) In some formulations of the theory, operations of a more general type are allowed. Cf. Newman: „On the Foundations of Combinatory Analysis Situs", Proc. of the Royal Acad. of Amsterdam, vol. 29, pp. 610—641.

Just a word, now, as to the relation between the three types of analysis situs described above. I say, first of all, that flat analysis situs, in which we are dealing with collections of ordinary flat simplexes, can be re-formulated in purely combinatorial terms, so as to become completely independent of analytic geometry. Suppose, for example, we are dealing with a complex of n-simplexes. Then, if we denote the vertices of the complex by the letters

$$a_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

we can conveniently denote the complex itself by a homogeneous form of degree $n + 1$ with unit coefficients,

$$(1) \qquad \Sigma\, a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_n},$$

such that each term of the form represents a simplex of the complex with vertices corresponding to the letters a_i appearing in the term. Conversely, every such form in which there are neither repeated terms nor repeated vertex symbols within the same term represents a class of congruent complexes, one member of which may always be effectively constructed in a space of sufficiently many dimensions. Now, it would, no doubt, be very difficult to give a direct combinatorial formulation of the general operation of subdividing a simplex into smaller simplexes. There is one very special type of subdivision, however, which offers no such difficulty; namely, the one where we introduce a new vertex b on an edge $a_i\, a_j$ and subdivide all simplexes of the complex with the edge $a_i\, a_j$ into pairs of simplexes with the edges $a_i\, b$ and ba_j respectively. In this simple case the combinatorial analogue of the subdivision is merely to pick out all terms of the form (1) containing both a_i and a_j and to replace every such term by a pair of terms, in the first of which the letter b replaces the letter a_i and in the second the letter a_j. Let us call this symbolic operation and its inverse (when the inverse is possible) *elementary transformations*, and regard these elementary transformations as the allowable moves of combinatorial analysis situs. It is then possible to prove the following theorem which brings out at once the complete parallelism between the flat and combinatorial theories:

A necessary and sufficient condition that two complexes of simplexes be flat homeomorphic is that their symbols be equivalent in the sense of combinatorial analysis situs.

We now come to the much more difficult problem of the relation between point theoretical analysis situs and flat. One main branch of point theoretical analysis situs deals with the theory of abstract spaces. I shall have very little to say about abstract spaces, in general, beyond remarking that one of the clearest ways of dealing with a large class of these spaces is to regard them as limiting cases of complexes in the sense of flat analysis situs, as is done, for example, by Alexandroff. By far the most important spaces are the ones of the so called *manifold* type, and on these I shall concentrate my attention. An n-dimensional manifold arising in the course of an ordinary investigation will probably be given in some such form as this. We shall first obtain a portion of the manifold, say an n-cell c_1; then, by some process analogous to analytic extension, a second n-cell c_2 overlapping a part of c_1; then a third n-cell c^3 overlapping a part of $c_1 + c_2$, and so on. With each cell c_i let us associate a coordinate system,

$$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}.$$

Then, if two cells c_i and c_j have a point P in common, the coordinates of the points of c_i neighboring to P will be expressible in terms of the coordinates of the same points regarded as points of c_j by relations of the form

$$x_i = F_{ij}(x_{j1}, \ldots, x_{jn}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

where the functions F_{ij} are continuous. Two questions now arise which it would be very desirable to answer: (α) Can every manifold M be cut up into a complex of cells, thus making it possible for us to regard it as the image of a complex S consisting of flat simplexes? (β) If two manifolds M_1 and M_2 are the images of the simplicial complexes S_1 and S_2 respectively, can the complexes S_1 and S_2 (and, therefore, the manifolds M_1 and M_2) be homeomorphic without being flat homeomorphic? An affirmative answer to these two questions would enable us to reformulate the general theory of manifolds in terms of the flat theory and, therefore, ultimately, in terms of the combinatorial theory. If, by good fortune, the functions F_{ij} in relations (2) are all analytic, or even if they are sufficiently smooth, it is merely a matter of honest toil to show that the manifold M can be cut up into cells, thus answering the first question; but if the functions F_{ij} are merely continous the problem is of quite another order of difficulty. I believe that questions (α) and (β) both reduce, without too much difficulty, to the solution of the following hypothetical lemma:

Consider an n-simplex S and a one-one continuous transformation τ carrying the simplex S into a region R of Euclidean n-space. Then we can approximate the transformation τ as closely as we please by a one-one analytic transformation τ_1 (or by a one-one continuous transformation τ_2, linear in patches)[2].

The essential difficulty in proving the lemma is to obtain a transformation τ_1 (or τ_2) which is one-one. Let

$$x_i' = F_i(x_1, \ldots, x_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

be the equations of the transformation τ. Then, by the classical methods of Weier-

[2]) The existence of the transformation τ_1 can be shown to imply the existence of the transformation τ_2, and vice-versa.

strass, we may approximate the functions F_i as closely as we please by analytic functions G_i and thus obtain an approximating analytic transformation

$$x_i' = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Unfortunately, there is nothing to guarantee that the approximating transformation shall be one-one. When we confine our attention to manifolds of one and two dimensions the lemma can be solved without excessive difficulty; consequently, it is possible to reduce the general theory of these manifolds to combinatorial terms.

As soon as we go beyond two dimensions, even the combinatorial theory of manifolds is in a very incomplete state. I should, therefore, like to say a few words about some of the unsolved problems for the case of manifolds of dimensionality 3 – the simplest outstanding case. In the following discussion, it is always to be understood that we are dealing with figures that are so smooth as not to involve us in point theoretical difficulties of a pathological nature.

Suppose we have a closed surface S of genus p situated in ordinary 3-space and in the canonical shape of a sphere with p exterior, tubular handles. The interior of the surface S is then a region of a very special type, characterized by the property that it can be oriented and that it can be made simply connected by cutting it along p suitably chosen 2-cells (2-cells cutting across the respective handles, for example). We shall call such a region a *canonical region* of genus p. The significance of canonical regions in the theory of manifolds has been brought out by Heegaard who has shown that in every orientable manifold (of the compact, non-bounded type) there is always at least one surface S of suitable genus p separating the manifold into two such regions. Let us call the surface S a *canonical surface* of the manifold. Then, the minimum value of the genera p of all canonical surfaces in the manifold is a theoretical invariant of the manifold which we are unfortunately unable to calculate effectively in our present state of knowledge. We shall call this invariant the *genus* of the manifold. If the genus of the manifold is zero, for example, it means that there exists a surface of genus 0 separating the manifold into a pair of 3-cells. In other words, the manifold is a 3-sphere. If the genus of the manifold is 1 it means that the manifold can be constructed by taking the interiors and boundaries of two anchor rings in 3-space and piecing the two domains together by setting their boundaries in one-one bi-continuous correspondence with one another. The manifolds of genus 1 are relatively simple in structure and their Poincaré groups are always of the cyclic type, yet no complete classification of them has ever been carried through. It has been shown that there are two distinct manifolds with the same cyclic groups of order 5 and, therefore, with the same Betti numbers and coefficients of torsion. There appear to be two distinct manifolds with cyclic groups of order 7, but the proof that they really are distinct has still to be given. When we come to manifolds of genus 2, examples of so-called *Poincaré spaces* arise. These are manifolds with the same Betti and torsion numbers as a 3-sphere, yet which are not simply connected.

One or two general remarks about the classification of manifolds according to Heegaard's program may, perhaps, be worth making. The problem divides itself naturally into two parts: (*i*) to determine in how many essentially different ways two canonical regions of genus p can be matched together to form a manifold; (*ii*) to determine in how many essentially different ways a canonical region can be traced in a manifold. The first part of the problem does not seem hopelessly difficult; it is closely related to the problem of the number of essentially different one-one mappings of one surface of genus p on another. As to the second part of the problem, I have a strong suspicion that if S and S^1 are two canonical surfaces of the same genus in a manifold M then there is always a continuous deformation of the manifold M into itself carrying the surface S into the surface S^1. It would be interesting to have a proof of this hypothetical theorem even for the case where the manifold M is a hypersphere. The theorem for a general manifold M seems to be reducible to this special case.

Poincaré once proposed the problem of determining whether the 3-sphere is the only 3-dimensional manifold such that its Poincaré group reduces to the identity – that is to say, such that every closed curve traced in the manifold can be deformed continuously into a point. This problem is a special case of the following more general one: is it always possible to map the universal covering space of a 3-dimensional manifold on a 3-sphere or on a portion of a 3-sphere? For the case of a 2-dimensional manifold, we know that the universal covering surface is always either a cell or a sphere. This simple theorem does not generalize, however, as the following example will show. We take the closed domain consisting of a region R of 3-space bounded by two concentric spheres together with the spheres themselves, and form a manifold out of this domain by matching each point P of the outer sphere with the point P^1 on the inner sphere in which the ray from the common centre of the spheres to P cuts the inner sphere. It is then easy to see that the group of the manifold thus obtained is the infinite cyclic group and that the universal covering space is homeomorphic with a finite portion of 3-space bounded by two spheres, such as the region R itself. The covering space may, however, be mapped on a portion of a 3-sphere, so that this example does not invalidate the theorem suggested above.

It would be interesting to have a complete census of all 3-dimensional manifolds with finite Poincaré groups. The covering space of a manifold of finite group is always a Poincaré space such that its group reduces to the identity. Very possibly this covering space is always a hypersphere. Let us assume that this is the case. Then the problem reduces to the determination of all the finite groups of transformations of a 3-sphere into itself such that no one of the transformations leaves invariant a point of the 3-spheres. If our assumption about the covering space is false we can, at all events, obtain in this way an important class of manifolds with finite Poincaré groups.

The theory of 3-dimensional manifolds seems to be closely dependent on the theory of knots and linkages in ordinary spherical 3-space. It can be shown, for example, that every orientable 3-dimensional manifold can be represented by a suitable n-sheeted Riemann space (in the sense of a generalized Riemann surface) with a finite number of simple, non-intersecting branch curves about which the various sheets of the space are permuted. What makes this mode of representation so complicated is the fact that the branch curves can be arbitrarily knotted and inter-linking. A number of useful knot invariants have been discovered in recent years which make it possible to distinguish between all the simpler knots and, in particular, to determine whether an alternating knot can be reduced to an un-

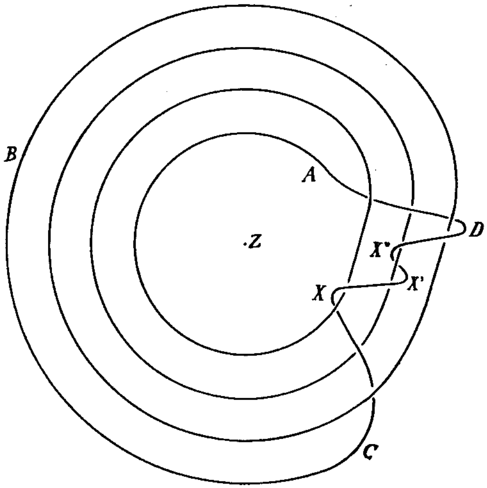


Fig. 2

knotted curve[3]). Every knot can be reduced to a simple semi-canonical form (fig. 2), which is unfortunately not unique. It consists of two arcs: an arc $A\,B\,C$ in the form of a plane spiral and an arc $C\,D\,A$ in the form of a 3-dimensional curve weaving over and under the turns of the spiral in such a way that as a variable point x moves

[3]) For a connected account of modern knot theory the reader is referred to Reidemeister's genial monograph: Knotentheorie, Springer (1932).

along the arc from C to A the radius vector ZX from the centre of the spiral to X turns continually in the same direction around Z. If the arc $C\,D\,A$ goes straight across from C to A without doubling back on itself (as it doubles back, for instance, at X, X', X'' and D in the figure) we can easily see that the curve is unknotted, no matter how $C\,D\,A$ weaves through the turns of the spiral. Perhaps it can be shown that if the arc $C\,D\,A$ *does* double back on itself, then, either the curve has a knot in it or else there is an obvious transformation which reduces the representation to one in which the arc $C\,D\,A$ no longer doubles back.

In conclusion, my main regret is that it has been so much easier to make up mathematical knots than to untie them.

Sur l'existence de la dérivée des fonctions d'une variable réelle et des fonctions d'intervalle

Par Frédéric Riesz, Szeged, Hongrie

On doit à M. *Lebesgue* le théorème d'après lequel toute fonction continue et monotone ou ce qui revient au même, *toute fonction continue et à variation bornée admet presque partout une dérivée finie et déterminée.* Ce théorème, un des plus frappants et des plus importants de l'Analyse réelle, date de l'année 1904, mais les origines du problème remontent à une époque beaucoup plus éloignée. On convient généralement de les dater de l'année 1806, d'un mémoire „sur la théorie des fonctions dérivées" d'*Ampère,* où ce grand savant essayait d'établir la dérivabilité d'une fonction „quelconque", à l'exception de certaines valeurs „particulières et isolées" de la variable. D'ailleurs, en tenant compte de l'évolution de l'idée de fonction, on a le sentiment – bien que le texte original ne dise rien de positif sur ce point – que les efforts du grand savant ne pouvaient guère être dirigés au delà des fonctions composées de traits monotones, c'est-à-dire au delà de la tâche accomplie par M. *Lebesgue.*

Vous savez tous que, pendant le siècle qui s'est écoulé entre les deux dates, quelque fécond que ce siècle ait été pour le développement de l'Analyse, la résolution du problème n'a pas avancé, il semble même, au premier abord, que sa solution définitive s'éloignait. D'abord il a fallu plus d'un demi-siècle jusqu'à ce que la critique de *Weierstrass* mît fin aux tentatives répétées dirigées sur les fonctions continues du type le plus général et cela en construisant une fonction continue sans dérivée. Puis ces exemples se sont multipliés, on en a inventé de plus en plus simples, faisant appel pour la plupart à l'intuition géométrique, on s'est engagé à mettre en évidence leurs rapports mutuels et avec d'autres problèmes, œuvre à laquelle ont pris part presque tous les grands maîtres de l'Analyse de la seconde moitié du siècle et qui s'est continuée jusqu'à nos jours. Mais en inventant des singularités nouvelles, on perdait de vue les cas moins singuliers. Quant aux problèmes d'ordre général, il paraît que l'on ne comptait sur rien de bon. Il suffit de feuilleter l'édition allemande des *Fondamenti* de *Dini,* de l'année 1892, pour voir à quoi on s'attendait vers la fin du siècle. Peut-être était-on intimidé par un pressentiment vague du secret que viennent de révéler MM. *Mazurkiewicz* et *Banach:* c'est que, dans le monde des fonctions continues, celles qui admettent une dérivée finie, même en un seul point isolé, sont dispersées d'une manière infiniment rare.

Quoi qu'il en soit, il serait injuste de ne pas avouer que le siècle passé, bien qu'à son insu, a contribué largement à la solution de notre problème. L'intégrale de

Riemann, avec ses généralisations, la théorie de *Cantor*, les idées de ce dernier, de *Jordan*, de M. *Peano* et d'autres sur la mesure des ensembles et en particulier celles de M. *Borel* préparaient lentement, mais impérativement le chef-d'œuvre de M. *Lebesgue*, sa théorie de l'intégration et avec celle-ci le théorème dont nous venons de parler, savoir que toute fonction continue et monotone admet une dérivée finie et déterminée presque partout, c'est-à-dire, abstraction faite, s'il est nécessaire, de certains points exceptionnels, formant un ensemble de mesure nulle.

Entraîné par la révolution que déchaînait dans toute l'Analyse réelle la théorie de M. *Lebesgue*, le problème de l'existence des dérivées ne s'arrêta plus jusqu'à nos jours. On a étendu le théorème de M. *Lebesgue* à des classes plus générales de fonctions, d'abord en supprimant l'hypothèse de la continuité, puis en généralisant l'idée de fonction à variation bornée, et l'on a réussi aussi à ranger ces résultats sous des lois qui sont, sans être évidentes, valables pour toute fonction continue ou discontinue, lois auxquelles obéissent presque partout les quatre nombres dérivés de *Dini*. L'intégration des fonctions de plusieurs variables, l'extension de l'intégrale de *Stieltjes*, la théorie des fonctions additives d'ensemble, due principalement à MM. *Lebesgue*, *Radon* et *de la Vallée-Poussin* et poussée par M. *Fréchet* jusqu'aux ensembles abstraits, l'extension de l'idée de l'intégrale par MM. *Denjoy*, *Kintchine* et *Perron*, l'intégrale de M. *Daniell*, l'intégration des fonctions d'ensembles non-additives, tout cela a donné lieu à diverses définitions de la dérivée et aux problèmes d'existence qui y correspondent. C'est là un vaste domaine de recherches dont j'avoue ne pas avoir visité encore tous les coins. En particulier, quant aux problèmes relatifs à la dérivation, je n'ai entretenu avec ceux-ci, jusqu'à l'année passée, que des rapports de bon voisinage. Aujourd'hui même, je ne me sens pas compétent de vous parler de chacun d'eux. Je ne parlerai que de quelques-uns, choisis parmi les plus importants et appartenant aux fondements de la théorie. Ce sont des théorèmes connus auxquels je n'ai rien à ajouter et si je prends la liberté de vous en entretenir, c'est que j'ai réussi à les faire entrer dans un ordre d'idées tellement élémentaires qu'ils pourraient figurer dans les premiers chapitres des Cours d'Analyse.

I.

Commençons par le cas des fonctions monotones. M. *Lebesgue* à établi son théorème dans la première édition de son livre sur l'intégration, à la fin du dernier chapitre, comme dernière conséquence de la théorie entière. Cependant, ni l'idée de l'intégrale, ni celle de la mesure n'interviennent dans l'énoncé du théorème. En effet, l'idée d'ensemble de mesure nulle ne dépend pas essentiellement de la théorie générale de la mesure, et les propriétés principales de ces ensembles s'établissent en quelques mots.

Les premières démonstrations du théorème qui tiennent compte d'une telle indépendance, sont dues à M. *Faber* et à M. et M[me] *Young*. Ces démonstrations, ainsi que celles inventées plus tard par divers auteurs, sont basées, effectivement ou d'une façon plus ou moins cachée, sur des théorèmes de choix concernant des familles d'intervalles; qu'il nous suffise de mentionner le théorème géométrique du regretté *Vitali*. Dans la démonstration que je vais exposer, la place de ces théorèmes de choix sera occupée par un théorème auxiliaire appartenant aux éléments de l'Analyse. Celui-ci a l'avantage de permettre d'enfermer les ensembles de mesure nulle dont il s'agira, dans des systèmes de plus en plus petits d'intervalles par un procédé déterminé d'avance, pour ainsi dire entièrement *automatique*.

Pour la commodité du langage, je supposerai d'abord qu'il s'agit d'une fonction continue et monotone et j'indiquerai seulement à la fin les modifications presque évidentes qu'on aura à faire pour lever l'hypothèse de la continuité.

Le théorème auxilière dont j'aurai à me servir, n'a rien à faire avec la monotonie et peut être énoncé pour une fonction continue d'ailleurs quelconque. *Soit $g(x)$ une telle fonction, définie dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, et soit E l'ensemble des points x intérieurs* à (a, b) *et tels qu'il existe un $\xi > x$, de sorte que $g(\xi) > g(x)$. Alors, l'ensemble E est ou bien vide ou bien c'est un ensemble ouvert, c'est-à-dire qu'il se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles ouverts et disjoints (a_k, b_k). Je dis que*

$$g(a_k) \leqq g(b_k),$$

et cela pour tous ces intervalles.

La première partie du théorèm étant d'une évidence immédiate, il ne nous reste qu'a démontrer l'inégalité. Soit x un point intermédiaire entre a_k et b_k; je vais prouver que l'on a $g(x) \leqq g(b_k)$; l'inégalité à démontrer s'ensuivra si l'on fait tendre x vers a_k. A cet effet, soit, entre x et b_k, x_1 le point le plus proche de ce dernier pour lequel $g(x_1) \geqq g(x)$; nous aurons à montrer que x_1 coïncide avec b_k. Car, s'il n'en était pas ainsi, les points ξ_1 qui correspondent à x_1 par l'hypothèse du théorème, devraient être situés au delà de b_k et comme de plus, b_k n'appartient pas à l'ensemble E, on aurait $g(x_1) < g(\xi_1) \leqq g(b_k) < g(x_1)$, ce qui implique contradiction.

On peut noter d'ailleurs et peut-être l'aurez-vous déjà aperçu qu'en général, on a précisément $g(a_k) = g(b_k)$, sauf peut-être si $a_k = a$.

Cela étant, soit $f(x)$ une fonction continue et monotone pour $a \leqq x \leqq b$; pour fixer les idées, nous la supposons croissante. Désignons de la manière usuelle par Λ_d et λ_d ses nombres dérivés supérieur et inférieur à droite et par Λ_g et λ_g ceux à gauche. Pour démontrer le théorème de M. *Lebesgue*, on n'aura qu'à prouver que l'on a presque partout 1° $\Lambda_d < \infty$; 2° $\Lambda_d \leqq \lambda_g$. En effet, en appliquant 2° à la fonction $-f(-x)$, il vient que l'on a presque partout $\Lambda_g \leqq \lambda_d$ et en combinant cela avec 1° et 2°, on obtient $\Lambda_d \leqq \lambda_g \leqq \Lambda_g \leqq \lambda_d \leqq \Lambda_d < \infty$; il s'ensuit que presque partout, les quatres nombres dérivés admettent des valeurs finies et égales entre elles, ce qu'il fallait démontrer.

Pour vérifier l'assertion 1°, c'est-à-dire que l'ensemble E_∞ des points x pour lesquels $\Lambda_d = \infty$, est de mesure nulle, observons que cet ensemble est compris dans l'ensemble E_C pour lequel $\Lambda_d > C$, C désignant une quantité choisie aussi grande qu'on voudra. Or la relation $\Lambda_d > C$ implique l'existence d'un $\xi > x$, tel que

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} > C,$$

c'est-à-dire que $g(\xi) > g(x)$, où l'on a posé $g(x) = f(x) - C x$. Donc, l'ensemble E_C est emboîté dans les intervalles (a_k, b_k) de notre théorème auxiliaire et d'après ce théorème, on a $f(b_k) - C b_k \geqq f(a_k) - C a_k$, c'est-à-dire que l'on a

$$C(b_k - a_k) \leqq f(b_k) - f(a_k).$$

Cela donne, par addition,

$$C \Sigma (b_k - a_k) \leqq \Sigma [f(b_k) - f(a_k)] \leqq f(b) - f(a),$$

ce qui montre que, pour C suffisamment grand, la longueur totale des intervalles (a_k, b_k) sera aussi petite que l'on voudra. C'est-à-dire que l'ensemble E_∞ est de mesure nulle.

La seconde assertion se vérifie par un raisonnement analogue, mais répété alternativement sous deux formes différentes. Soient $c < C$ deux quantités positives. Formons d'abord la fonction $g(x) = f(-x) + c x$ et soit Σ_1 le système des intervalles qui y correspondent par notre théorème auxiliaire ou plutôt de leurs symétriques par rapport à l'origine; alors, pour des raisons analogues à celles de tout à l'heure, Σ_1 renfermera tous les x pour lesquels $\lambda_g < c$. Soit de plus Σ_2 le système formé des intervalles (a_{kl}, b_{kl}) qui correspondent à la fonction $g(x) = f(x) - Cx$, mais considérée séparamment à l'intérieur de chaque intervalle (a_k, b_k). Alors, on aura pour ces intervalles

$$f(b_k) - f(a_k) \leqq c(b_k - a_k); \quad C(b_{kl} - a_{kl}) \leqq f(b_{kl}) - f(a_{kl})$$

et il s'ensuit que

$$C \Sigma_2 \leqq V_2 \leqq V_1 \leqq c \Sigma_1,$$

c'est-à-dire que

$$\Sigma_2 \leqq c/_C \Sigma_1,$$

où l'on a désigné par Σ_1, Σ_2 la longueur totale des deux systèmes d'intervalles et par V_1, V_2 les sommes des variations respectives de la fonction $f(x)$.

En répétant les deux procédés alternativement, on obtiendra une suite Σ_1, Σ_2, ... de systèmes d'intervalles, chacun emboîté dans les précédents et l'on aura d'une façon générale

$$\Sigma_{2n} \leqq c/_C\, \Sigma_{2n-1}.$$

Il s'ensuit que

$$\Sigma_{2n} \leqq (c/_C)^n\, \Sigma_1 \to 0.$$

Or, les points x pour lesquels on a simultanément $\Lambda_d > C$ et $\lambda_g < c$, sont évidemment compris dans tous les systèmes Σ_n; c'est-à-dire qu'ils forment un ensemble E_{cC} de mesure nulle. Enfin, chaque point x tel que $\Lambda_d > \lambda_g$ appartient à de tels ensembles, et l'on peut même supposer que c et C soient des nombres rationnels, pour la seule raison que, entre deux nombres réels différents, on peut toujours intercaler deux nombres rationnels. C'est-à-dire que, en formant les ensembles E_{cC} pour tous les couples rationnels, leur réunion E^* contiendra tous les x pour lesquels $\Lambda_d > \lambda_g$. Mais d'autre part, il n'y a qu'une infinité dénombrable de couples rationnels; donc l'ensemble E^* est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle et par conséquent E^* et, à plus forte raison, l'ensemble envisagé qui y est compris, seront eux-mêmes de mesure nulle.

Ainsi, le théorème de M. *Lebesgue* est démontré dans le cas où la fonction monotone $f(x)$ est continue. Pour l'étendre au cas des fonctions discontinues, observons que notre théorème auxiliaire reste valable après des modifications presque évidentes, pour des fonctions $g(x)$ discontinues. Pour notre but, il suffit d'envisager le cas où les limites $g(x-0)$ et $g(x+0)$ existent. Désignons par $G(x)$ la plus grande des valeurs $g(x-0)$, $g(x)$, $g(x+0)$ où nous convenons de poser, pour conformité de l'écriture, $g(b+0) = g(b)$. Cela étant, les points x s'il y en a, intérieurs à (a, b) et tels qu'il existe un $\xi > x$ de sorte que $g(\xi) > G(x)$, forment un ensemble ouvert, et pour les intervalles (a_k, b_k) dont se compose cet ensemble, on aura

$$g(a_k + 0) \leqq G(b_k).$$

Les modifications que l'on aura à faire dans les raisonnements qui précédent, pour démontrer le théorème auxiliaire sous cette forme généralisée et pour l'appliquer au cas des fonctions monotones discontinues, sont tellement évidentes que vous me pardonnerez de supprimer les détails. Le seul point sur lequel j'ai à insister, c'est que l'hypothèse plus compliquée que nous venons de formuler en introduisant la fonction $G(x)$, ne touche en rien les points de continuité, et quant aux points de discontinuité, formant un ensemble dénombrable et à plus forte raison de mesure nulle, on pourra, à chaque instant, les ajouter à l'ensemble actuel ou les en exclure, suivant les exigences.

II.

Si j'ai insisté un peu longuement sur le théorème de M. *Lebesgue* et si je me suis efforcé d'en faire ressortir le caractère élémentaire, c'est que tous les autres faits dont j'ai encore l'intention de vous parler et dont la plupart ont l'air plus respectable que celui-là, en peuvent être envisagés comme de simples corollaires. Tel est mon avis, et j'espère vous en convaincre dans les quelques minutes dont je dispose encore.

Commençons par un théorème que l'on doit à M. *Fubini. Soit*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots = s(x)$$

une série convergente dont les termes sont des fonctions monotones du même type: pour fixer les idées, supposons qu'elles soient croissantes dans l'intervalle (a, b); alors il en sera de même pour la somme $s(x)$. *Le théorème en question affirme que*

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots = s'(x),$$

bien entendu sauf peut-être dans un ensemble de mesure nulle, c'est-à-dire que la différentiation terme à terme est permise presque partout.

Voici la démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $f_n(a) = 0$. Cela posé, écrivons

$$s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x); \qquad s_n(x) \to s(x).$$

Sauf un ensemble E_0 de mesure nulle, obtenu en réunissant l'infinité dénombrable de tous les ensembles d'exception, toutes ces fonctions admettent des dérivées finies et déterminées. Comme $s_n'(x) \leqq s_n'(x)$, la série

$$f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots$$

est convergente, sauf dans E_0. De plus, les $s_n'(x)$ allant en croissant, il suffira de vérifier la relation ci-dessus, c'est-à-dire la relation

$$s'(x) - s_n'(x) \to 0,$$

pour une suite partielle $n_1, n_2, \ldots$ convenablement choisie. On fera ce choix de sorte que $s(b) - s_n(b)$ diminue aussi rapidement que la série formée des différences $s(x) - s_{n_k}(x)$ soit convergente elle-même. Alors, cette série étant du même type que la série primitivement envisagée, la série qui vient en la différentiant terme à terme, convergera presque partout, et à plus forte raison, on aura presque partout $s'(x) - s'_{n_k}(x) \to 9$, ce qu'il fallait démontrer.

III.

Le théorème de M. *Fubini* étant établi, en voici une application immédiate, fournissant un théorème sur la *densité des ensembles*. Découvert par M. *Lebesgue* dans le cas des ensembles mesurables, le théorème a été étendu à des ensembles quelconques par MM. *Blumberg* et *Sierpinski*. Le point essentiel dans cette généralisation, d'ailleurs conséquence immédiate du théorème particulier, c'est qu'on peut le démontrer comme l'ont fait les deux auteurs, sans se servir de la théorie de la mesure. Il n'y intervient que la mesure extérieure $m_e(E)$ que l'on définit, vous le savez bien, comme la borne inférieure des longueurs totales de tous les systèmes d'intervalles qui renferment l'ensemble en question. Il suit immédiatement de la définition, que l'on a

$$m_e(E_1 + E_2) = m_e(E_1) + m_e(E_2)$$

dans tous les cas où E_1 et E_2 sont compris dans deux intervalles disjoints, fait que l'on peut exprimer aussi en disant que la mesure extérieure de la partie d'un ensemble E comprise dans des intervalles variables est une fonction additive d'intervalle. Convenons de dire que le point x, appartenant ou non à l'ensemble E, en est un *point de densité* lorsqu'on a

$$\frac{m_e(E; x-h, r+k)}{h+k} \to 1 \quad (0 < h, k \to 0),$$

l'expression qui figure au numérateur indiquant la mesure extérieure de la partie de E comprise entre $x-h$ et $x+k$. Avec cette dénomination, le théorème dont il s'agit affirme que *presque tous les points d'un ensemble quelconque en sont aussi des points de densité.*

On peut énoncer le théorème sous forme analytique en introduisant la fonction $f(x)$, égale, dans l'intervalle (a, b) où est situé l'ensemble E, à la mesure extérieure de la partie de E qui est comprise entre a et x. Cela posé, le théorème dit que $f'(x) = 1$ presque en tout point de E. Pour le démontrer, on n'aura qu'à envisager des ensembles ouverts (systèmes d'intervalles) $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ auquels E est intérieur et dont les longueurs totales tendent *rapidement* vers $m_e(E)$. En désignant par $f_n(x)$ la fonction analogue à $f(x)$ qui correspond à l'ensemble Σ_n à la place de E, on n'aura qu'a appliquer le théorème de M. *Fubini* à la série composée des différences $f_n(x) - f(x)$; il s'ensuivra que $f_n'(x) - f'(x)$ tend vers zéro presque partout dans E, et comme de plus $f_n'(x) = 1$ sur E pour tous les n, le théorème est démontré.

Je me hâte d'observer que je n'aurai pas besoin aujourd'hui du théorème général que je viens de vérifier et qu'il aurait suffi, en réalité, de considérer le cas des ensembles fermés, ce qui se fait d'une manière encore plus élémentaire. En effet, la seule conséquence que j'aurai à tirer du théorème, c'est que, pour presque tout point x de E, les intervalles compris entre $x-h$ et $x+k$ qui ne contiennent aucun point de E sont infiniment petits par rapport à la longueur $h+k$ de l'intervalle entier. Or, ce fait ne dépend que de l'ensemble fermé $\bar{E}$ que l'on obtient en ajoutant à E tous ses points limites.

IV.

Après avoir considéré les ensembles de points les plus généraux, voyons maintenant le théorème compréhensif concernant la *dérivation des fonctions les plus géné-*

rales. Le théorème dont je vais parler, est dû à M. *Denjoy* et à M[me] *Young* qui l'ont établi indépendamment l'un de l'autre dans le cas des fonctions continues; puis, M[me] *Young* l'a étendu aux fonctions mesurables; enfin, M. *Saks* a montré que le théorème subsiste aussi pour les fonctions les plus générales. Conformément à ce que l'on attend toujours lorsqu'il s'agit d'un théorème de très grande généralité, la démonstration inventée par M. *Saks* est déjà d'une extrême simplicité et je n'aurai à y apporter que quelques retouches.

Je vous prie de ne pas m'entendre mal quand je parle de la dérivation des fonctions discontinues. Je n'ai pas l'intention d'essayer l'impossible en différentiant les fonctions là où elles sont discontinues. Le théorème dont il s'agit compare seulement les quatres nombres dérivés, et ce qu'il affirme, c'est que, sauf peut-être en des points formant un ensemble de mesure nulle, la distribution de ces quatre nombres obéit à des lois bien simples. Considérons, avec M. *Denjoy*, deux nombres dérivés, comme *associés* s'ils sont relatifs aux mêmes côtés, comme par exemple λ_g et Λ_g, et comme opposés s'ils correspondent à des côtés et à des rangs différents, comme par exemple λ_g et Λ_d. Alors, à *part un ensemble de mesure nulle, il ne pourra se présenter que les cas suivants. Deux dérivés associés sont ou bien égaux et finis, ou bien inégaux et l'un au moins est infini : deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux ou infinis et inégaux, savoir celui de rang supérieur égal à* $+\infty$ *et l'autre égal à* $-\infty$. D'ailleurs la première loi, celle sur les dérivés associés, n'est qu'une conséquence évidente de la seconde et nous n'aurons à nous occuper que de cette dernière.

Avant d'entrer dans les détails, qu'il me soit permis d'attirer encore votre attention sur l'extrême simplicité de la loi que l'on obtient lorsqu'on cesse de distinguer entre droite et gauche et qu'on ne considère que les deux nombres dérivés *neutres*, inférieur et supérieur, définis par exemple comme la plus petite et la plus grande des limites du rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x-k)}{h+k} \quad (h,\, k \geqq o,\ o < h+k \to o),$$

Alors, *à part un ensemble de mesure nulle, il ne se présente que les deux possibilités extrêmes : ou bien ces deux limites sont infinies et de sens contraire, l'une infinie négative et l'autre infinie positive, ou bien la fonction admet une dérivée déterminée et finie.*

Vous voyez comment ces lois générales embrassent les fonctions monotones dont nous sommes partis: pour celles-ci, les infinis de sens contraire ne pourront pas se présenter et il ne reste qu'une seule possibilité, celle de l'existence d'une dérivée finie et déterminée.

Abordons la démonstration. Tout revient à prouver que, presque partout où le nombre dérivé λ_g n'est pas infini négatif, ce dérivé et son opposé Λ_g sont égaux et finis; la loi générale en ressort en remplaçant $f(x)$ successivement par $-f(x)$, $f(-x)$ et $-f(-x)$. Pour fixer les idées, nous supposerons que $f(x)$ soit définie dans l'intervalle (a, b), que rien n'empêche d'ailleurs de remplacer par un ensemble quelconque. Soit E l'ensemble des points x pour lesquels λ_g diffère de $-\infty$; cet ensemble peut être envisagé comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles $E_{n,r}$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ et où r parcourt les nombres rationnels compris dans l'intervalle (a, b), ces ensembles étant formés respectivement des points $x > r$ où l'on a

$$\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > -n$$

pour tous les ξ situés entre r et x. La somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle étant de mesure nulle elle-même, il nous suffira de prouver que la loi dont il s'agit, est valable presque partout dans chaque $E_{n,r}$ et comme, de plus, le cas général se ramène au cas $n = 0$, $r = 0$ en remplaçant $f(x)$ par $f(x-r) + n\,x$, nous n'aurons à nous occuper que de l'ensemble $E_0 = E_{0,0}$. Faisons abstraction de ceux des points de cet ensemble qui n'en sont pas des points de densité (il suffirait aussi de n'exclure que ceux qui ne le sont pas par rapport à l'ensemble fermé $\overline{E}_0$) et aussi ceux où $f(x)$ n'admet pas une dérivée finie et déterminée par rapport à l'ensemble E_0, c'est-à-dire calculée de sorte que l'on s'approche de x en ne quittant pas l'ensemble E_0. Il me faut encore attirer votre attention sur le fait que, grâce à la définition de l'ensemble E_0, la fonction $f(x)$, considérée à part en cet ensemble, y est monotone et que, de plus, elle y admet, presque partout, une dérivée déterminée et finie par rapport à cet ensemble, ce dernier fait n'étant qu'un corollaire évident du théorème de M. *Lebesgue*. De la sorte, nous n'avons supprimé jusqu'ici qu'un ensemble de mesure nulle; envisageons les points x de E_0 qui nous restent. Considérons le rapport d'accroissement

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}.$$

Lorsque x' tend vers x en ne quittant pas l'ensemble E_0, le rapport tend, d'après l'hypothèse faite, vers une limite qu'on pourra désigner par $f'_{E_0}(x)$. Dans le cas où x' n'appartient pas à l'ensemble E_0, mais est déjà suffisamment proche de x, x' pourra être remplacé, grâce à l'hypothèse de densité, par un $\xi > x'$ appartenant à E_0 et tel que la différence $\xi - x'$ soit infiniment petite par rapport à $x' - x$. Comme, par la définition de l'ensemble $E_0 = E_{0,0}$, on aura $f(\xi) \geqq f(x')$, alors le numérateur du rapport envisagé ne diminue pas lorsqu'on remplace x' par ξ; quant au dénominateur, il n'en sera pas sensiblement altéré. En tenant compte encore des deux signes que peut prendre ce dernier, on voit immédiatement que

$$\lambda_g \geqq f'_{E_0}(x) \geqq \Lambda_d,$$

et comme, d'autre part, la quantité $f'_{E_0}(x)$, d'après sa définition, représente elle-même une des limites, de gauche ainsi que de droite, du même rapport d'accroissement par lequel on définit les quantités λ_g et Λ_d, ce n'est que le signe d'égalité qui pourra se présenter. Le théorème est donc démontré.

V.

J'arrive maintenant au dernier problème dont je voulais vous parler. Il se rattache à la notion de *fonction d'intervalle,* c'est-à-dire d'une loi qui fait correspondre à chaque intervalle appartenant à une certaine famille une quantité déterminée; d'ailleurs rien n'empêche de considérer des fonctions multiformes d'intervalle. Pour fixer les idées, soit $f(\alpha, \beta)$ une fonction d'intervalle définie pour tous les intervalles (α, β) faisant partie d'un certain intervalle (a, b). Lorsque $f(\alpha, \gamma) = f(\alpha, \beta) + f(\beta, \gamma)$, c'est-à-dire que la fonction f est additive, elle n'est que la variation de la fonction au sens ordinaire $F(x) = f(a, x)$; c'est-à-dire que dans ce cas, l'idée de fonction d'intervalle n'est qu'une question d'écriture. Pour avoir des problèmes nouveaux, il faut renoncer à l'additivité. Voici quelques exemples de fonctions d'intervalle qui ne sont pas nécessairement additives: la variation numérique $|f(\beta) - f(\alpha)|$ d'une fonction $f(x)$; l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle (α, β); la même multipliée par $\beta - \alpha$; la longueur de la corde qui joint les points correspondant à $x = \alpha$ et $x = \beta$ de la courbe $y = f(x)$ ou plus généralement la corde d'une courbe $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ correspondant aux valeurs α et β du paramètre t; citons enfin le carré de $f(\beta) - f(\alpha)$ divisé par $\beta - \alpha$. Tous ces exemples appartiennent, sous des hypothèses convenables, à la classe des *fonctions intégrables d'intervalle.* Les deux premiers y appartiennent lorsque $f(x)$ est continue et à variation bornée et leur intégrale n'est que la variation totale de $f(x)$; le troisième est intégrable lorsque $f(x)$ est bornée et elle a pour intégrale la quantité bien connue introduite par *Riemann* et qui n'est que la différence des intégrales de *Darboux* de $f(x)$; le quatrième l'est lorsqu'il s'agit d'une courbe rectifiable et il foiurnt la longueur; le cinquième correspond à la notion d'intégrale inventée par M. *Hellinger* pour l'analyse des formes quadratiques à une infinité de variables.

La définition de l'*intégrale d'une fonction d'intervalle* est bien simple; elle n'est que la généralisation de l'intégrale de *Riemann* ou des intégrales de *Darboux.* On partage l'intervalle (a, b) en des intervalles partiels, on forme la somme des valeurs qui correspondent à ces intervalles et l'on regarde si ces sommes tendent vers une limite finie et déterminée lorsqu'on fait varier la décomposition de sorte que la longueur des intervalles partiels tende uniformément vers zéro. Lorsqu'il en est ainsi, la fonction d'intervalle est dite intégrable et la limite des sommes est appelée son intégrale. Pour faire mieux ressortir la généralité de cette notion, qu'il me suffise d'attirer votre attention sur le fait évident que toutes les fonctions additives d'intervalle, c'est-à-dire toutes les $f(\alpha, \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ sont intégrables, quelque singulière que soit la fonction $F(x)$.

On entend par dérivée de la fonction d'intervalle $f(\alpha, \beta)$ au point x la limite, lorsqu'elle existe, du rapport

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{\beta - \alpha}$$

Les nombres dérivés se définissent d'une manière ana'ogue. Lorsque, en particulier, $f(\alpha, \beta)$ est additive, ces quantités ne sont autres que celles qui correspondent, au sens ordinaire, à la fonction $F(x) = f(a, x)$.

Le problème de la dérivation des fonctions d'intervalles a été étudié, il y a peu d'années, par MM. *Burkill* et *Saks* et cela d'un point de vue très général. Le théorème que je vais démontrer n'est que la quintessence des principaux résultats acquis.

Soit $f(\alpha, \beta)$ une fonction d'intervalle intégrable dans (a, b), de plus non-négative et d'intégrale nulle. Dans ces hypothèses, $f(\alpha, \beta)$ admet, presque partout dans l'intervalle (a, b), une dérivée déterminée et égale à zéro.

L'importance de ce théorème réside dans ses applications. Ainsi, il implique, entre autres, l'extension la plus générale, donnée successivement par MM. *Lebesgue* et *Tonelli*, de la formule classique

$$[s'(t)]^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2,$$

fondamentale dans la théorie de la *rectification des courbes*. Mais il permet aussi, d'une manière générale, d'en finir avec le problème de la dérivation pour toutes les fonctions intégrables d'intervalle. En effet, on voit immédiatement que, à chacune de ces fonctions f, on peut faire correspondre une sorte d'intégrale indéfinie $F(x)$, fonction de point, et telle que l'intégrale de $f(\alpha, \beta)$, calculée pour les sous-intervalles de (a, b), est donnée par la variation respective de $F(x)$. On voit de même, par un raisonnement facile, que l'expression $|f(\alpha, \beta) - F(\beta) + F(\alpha)|$ fournit une fonction d'intervalle qui est justement du type envisagé par notre théorème; il s'ensuit que $f(\alpha, \beta)$ et $F(x)$ admettent presque partout les mêmes nombres dérivés et que, en particulier, presque partout où l'une des deux admet une dérivée finie et déterminée, il en sera de même de l'autre et inversement.

La démonstration du théorème est elle-même presque immédiate. Soient δ_1, δ_2, ... des quantités positives choisies de sorte que la somme des valeurs $f(\alpha, \beta)$ qui correspondent à une décomposition de l'intervalle entier (a, b) en des intervalles partiels dont la longueur est égale au plus à δ_n, ne surpasse pas le terme général d'une série convergente, donnée d'avance. Cela étant, introduisons des fonctions $F_n(x)$, définies comme il suit: la fonction $F_n(x)$ est égale à la borne supérieure des sommes des valeurs $f(\alpha, \beta)$ qui correspondent aux décompositions de l'intervalle (a, x) en des intervalles dont la longueur ne surpasse pas δ_n. Alors ces fonctions $F_n(x)$ seront des fonctions croissantes, formant une série convergente, de sorte que, par suite du théorème de M. *Fubini*, $F_n'(x)$ tendra vers zéro presque partout. De plus, comme

$$f(\alpha, \beta) \leqq F_n(\beta) - F_n(\alpha) \qquad (\beta - \alpha \leqq \delta_n),$$

les dérivées des F_n seront, partout où elles existent, des majorantes des nombres dérivés de la fonction d'intervalle f. C'est-à-dire que ces nombres dérivés s'annullent presque partout, ce qu'il fallait démontrer.

Je pourrais encore continuer dans l'ordre d'idées que je viens d'esquisser et cela en passant, par exemple, aux fonctions de plusieurs variables ou bien en faisant voir comment, la dérivabilité des fonctions monotones et des séries de telles fonctions une fois démontrée, ces deux théorèmes permettent d'établir coup sur coup toute la théorie de l'intégration. Mais il faut que je finisse. Je pense que le peu que ces trois quarts d'heure me permettaient de vous raconter, suffit pour faire voir, en particulier à ceux qui aiment les traditions, que cette branche moderne de l'Analyse qu'inaugura M. *Lebesgue*, n'exige nullement de changer l'ordre traditionnel des paragraphes et qu'il y aura même des avantages de commencer par le Calcul différentiel.

Le théorème de Borel-Julia dans la théorie des fonctions méromorphes

Par Georges Valiron, Paris

Je commencerai par expliquer en quelques mots les raisons pour lesquelles j'ai donné à cette conférence un titre qui peut porter à croire que je vais parler d'un sujet très particulier. Mon intention véritable est de vous entretenir de certaines propriétés métriques des fonctions analytiques dans le voisinage de leurs singularités. Mais comme je ne puis m'étendre trop, je me bornerai surtout au cas des fonctions méromorphes pour lesquelles les résultats acquis sont le plus nets et ne ferai que de brèves allusions à des cas plus généraux. D'autre part, les premières études relatives à l'ordre d'idées que je veux considérer ayant été l'œuvre, à près de vingt-cinq ans d'intervalle, de MM. Borel et Julia, il m'a semblé que le titre choisi était susceptible plus que tout autre, de renseigner succintement sur le sujet de mon exposé, à condition bien entendu que l'on veuille y prendre le mot théorème dans son acception la plus large.

Le peu de temps dont je dispose ne me permet pas de m'attarder beaucoup sur les origines de la théorie générale des fonctions entières ou méromorphes, il me sera cependant nécessaire d'en parler rapidement pour mieux faire ressortir l'originalité des recherches que M. Borel poursuivit sur ce sujet entre 1896 et 1900. On sait que Weierstrass avait donné en 1876 deux théorèmes bien connus, l'un sur la décomposition en un produit de facteurs des fonctions entières, c'est-à-dire holomorphes en tout point à distance finie, l'autre sur l'indétermination complète d'une fonction uniforme F (z) dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée. Ces deux théorèmes eurent une fortune très différente. Dès 1879, M. Picard remplaça le second par un énoncé célèbre que je m'excuse presque de reproduire: la fonction $F(z)$ prend effectivement une infinité de fois toute valeur finie ou infinie, sauf deux valeurs au plus, dans le voisinage de la singularité en question. Il faut remarquer que, si ce théorème de Picard a rendu caduc celui de Weierstrass, il ne l'a pas entièrement supplanté dans l'enseignement. On trouve encore dans certains traités d'analyse la démonstration du théorème de Weierstrass et seulement l'énoncé de celui de Picard. Ceci tient sans doute à ce que la démonstration du second est moins rapide que celle du premier, mais peut-être aussi à ce que l'importance de l'ordre d'idées nouveau qu'il apporte n'est pas reconnue partout.

On sait que le premier théorème de Weierstrass conduisit Laguerre à introduire la notion de genre: une fonction entière $f(z)$ est de genre p lorsqu'elle peut se mettre sous l'une des deux formes

$$f(z) = e^{Q(z)}\, P(z), \quad f(z) = z^s\, e^{Q(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^p}{p a_n^p}},$$

$Q(z)$ étant un polynome de degré p au plus, $P(z)$ un polynome quelconque et le produit infini un produit de Weierstrass. Il faut ajouter qu'on suppose qu'une telle décomposition ne serait pas possible si l'on remplaçait p par $p-1$. Il serait hors de mon sujet de parler des belles propositions généralisant des théorèmes de la théorie des équations algébriques que Laguerre rattacha à cette notion de genre et qui furent développées ultérieurement par MM. Borel et Leau, puis plus récemment par Lindwart, MM. Montel, Pólya et Schur. Mais il me faut bien dire que ce fut cette question du genre qui dès lors prima toutes les autres, peut-être parce que son objet formel se rapprochait davantage des idées reçues. Hermite et Laguerre s'efforcèrent de déterminer le genre d'une fonction à partir de propriétés de la dérivée logarithmique, c'est leur procédé que l'on emploie encore souvent aujourd'hui pour obtenir la décomposition en facteurs des fonctions élémentaires: on cherche le développement de Mittag-Leffler de la dérivée logarithmique et on intègre. Mais cette méthode ne fut pas poussée très loin à cette époque, au point de vue théorique son plein développement ne se rencontre que beaucoup plus tard dans les travaux de Boutroux. Ce fut Poincaré qui découvrit en 1883 la voie dans laquelle il convenait de s'engager en établissant le premier une relation entre le genre et un autre indice attaché à la fonction et qui peut se déduire de la connaissance du développement de Taylor, l'ordre de grandeur du module maximum $M(r, f)$ de $f(z)$ pour $|z| = r$. Dans un mémoire fondamental, M. Hadamard donna tout leur essor aux idées de Poincaré en arrivant par une magnifique analyse a déterminer une limite supérieure, d'ailleurs très précise, du genre d'une fonction entière connue par son développement de Taylor. Sa méthode a été remplacée aujourd'hui par d'autres plus simples, notamment par celle de M. Landau, mais elle a servi de base à tous les travaux sur ces questions pendant plus de vingt ans, elle a conduit à introduire dans la théorie des fonctions analytiques des considérations essentiellement nouvelles et j'ajoute qu'à ma connaissance, l'inégalité que M. Hadamard obtint entre le module des zéros et celui des cœfficients tayloriens n'a jamais été retrouvée sous une forme aussi précise.

Ce que je viens de dire suffit pour montrer quel était l'état de la théorie vers 1896: d'un côté le théorème de Picard qui restait isolé, de l'autre la question de la décomposition en facteurs à peu près résolue. M. Borel renouvela la théorie en l'élevant au-dessus des préoccupations formelles, en rapprochant les deux points de vue et en inaugurant une étude métrique précise des transcendantes entières les plus générales, puis des fonctions méromorphes. Son point de départ fut sa démonstration nouvelle du théorème de Picard dans le cas particulier des fonctions entières, démonstration dans laquelle il n'utilise qu'une propriété simple des fonctions analytiques due en partie à M. Hadamard et une propriété nouvelle des fonctions croissantes. Pour étudier les zéros d'une fonction entière, il introduit à la place du genre, d'une part l'ordre ou ordre apparent, d'autre part l'exposant de convergence ou ordre réel. L'ordre est le nombre ϱ défini par

$$\varrho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}$$

il se déduit des propriétés asymptotiques des cœfficients tayloriens; l'exposant de convergence de la suite des zéros de $f(z)-a$ est le nombre

$$\varrho(a) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log n(r, a)}{\log r}$$

$n(r, a)$ désignant le nombre des zéros de $f(z)-a$ situés dans le cercle $|z| \leq r$. M. Borel montre que, si ϱ n'est pas entier, $\varrho(a)$ est égal à ϱ quel que soit a, le genre est la partie entière de ϱ. Si ϱ est entier, le genre peut être ϱ ou $\varrho - 1$, mais $\varrho(a)$ est encore égal à ϱ sauf au plus pour une valeur de a. Dans le cas de l'ordre infini, il donne des propositions analogues qui furent complétées et améliorées ultérieurement par M. Blumenthal. Il précise ses théorèmes dans le cas des croissances régulières et les étend aux fonctions méromorphes; il trouve que pour ces fonctions, $\varrho(\infty)$ désignant alors l'exposant de convergence de la suite des pôles, les nombres $\varrho(a)$ ont tous la même valeur, sauf au plus pour deux valeurs de a, cette valeur commune est l'ordre de la fonction.

La précision de ces résultats autorisait M. Borel à définir quel devait être désormais, à son avis, le but de l'étude des fonctions entières ou méromorphes, ou d'une façon plus générale, de l'étude des fonctions dans le voisinage d'une singularité essentielle isolée autour de laquelle une branche est uniforme. C'est la connaissance, en quelque sorte interne, de la fonction que l'on doit poursuivre; tout d'abord, la recherche des propriétés communes des modules et des arguments des zéros de $f(z)-a$ lorsque a varie. Si par exemple, la fonction $\sin z$ est bien connue, ce n'est pas tant par son développement de Taylor ou par sa décomposition en facteurs que parce que l'on sait qu'elle est périodique; on peut en dire de même des fonctions elliptiques, on est parfaitement renseigné sur la position des points où de telles fonctions prennent une même valeur. De même, pour la fonction de Jacobi

$$S(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} (z^n + z^{-n}), \ |q| < 1,$$

quel que soit a, les zéros de $S(z)-a$ se précipitent pour ainsi dire vers ceux de $S(z)$ lorsqu'on s'approche du point à l'infini. A-t-on des propriétés valables pour toutes les fonctions et comprenant celles-ci et celles-là?

M. Borel ne se dissimulait pas les difficultés de la route qu'il conseillait de prendre; aussi engagea-t-il de commencer par l'étude approfondie, déjà largement amorcée, des modules des zéros de $f(z)-a$. Il m'est impossible de signaler tous les travaux publiés sur ce sujet, même en me bornant aux plus importants; beaucoup des résultats antérieurs rentrent d'ailleurs maintenant dans la théorie générale de M. R. Nevanlinna. Je me bornerai d'abord à citer les noms de Lindelöf, Wiman, Boutroux, Denjoy, Littlewood pour les fonctions d'ordre fini, de Denjoy et Blumenthal pour l'ordre infini et de Littlewood pour l'ordre nul et à dire que ces études furent grandement facilitées par l'emploi d'un théorème aujourd'hui classique de Jensen.

La principale difficulté dans ces recherches résidait peut-être moins dans la possibilité de cas exceptionnels où l'ordre réel s'abaisse que dans l'existence des fonctions à croissance irrégulière. D'autre part, la décomposition en facteurs se révélait souvent comme un outil mal commode lorsqu'on voulait pousser les approximations assez loin. Enfin, la comparaison des fonctions $n(r, a)$ et $\log M, (r, f)$ directe ou indirecte, qui fournit des résultats très simples dans certains cas, conduit à des complications dès que l'on sort de la classe des fonctions d'ordre fini positif. Il fallait modifier les fonctions à comparer et les démonstrations. J'ai substitué à la fonction $n(r, a)$ la valeur moyenne

$$N(r, a) = \int_o^r [\, n(x, a) - n(o, a)\,] \frac{dx}{x} + n(o, a) \log r$$

qui figure dans le théorème de Jensen; il faut la considérer comme un intermédiaire commode. M. R. Nevanlinna fit un pas beaucoup plus important en remplaçant log $M(r, f)$ par une autre valeur moyenne et d'une façon générale en introduisant la fonction caractéristique

$$T(r, f) = N(r, \infty) + \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \overset{+}{\log} |\, f(re^{i\Theta}) \,|\, d\,\theta,$$

$\overset{+}{\log}\, u$ désignant $\log u$ si $u > 1$ et o si $o \leqq u \leqq 1$. Une belle transposition de la méthode de Borel le conduisit à une inégalité qui contenait celle que j'avais indiquée pour les fonctions entières, et qui, généralisée par Collingwood et Littlewood, prend la remarquable forme suivante: $a_1, a_2, \ldots a_q$ étant q nombres différents, on a

$$(q-2)\;\; T(r, f) < \sum_1^q N(r, a_j) + S(r);$$

le reste $S(r)$ est $O(\log r)$ lorsque l'ordre, qui est ici égal à $\overline{\lim}\, [\, \log T(r, f) \,/\, \log r\,]$, est fini; c'est $O[\, \log T(r, f)\,]$ sauf pour certains r dans tous les cas. Pour faire saisir toute la portée de cette inégalité, il faut ajouter que $\overline{\lim}\, N(r, a) \,/\, T(r, f)$ est inférieur ou égal à 1 quel que soit a. L'interprétation de cette formule fondamentale a conduit à poser un grand nombre de questions nouvelles et à distinguer diverses sortes de valeurs exceptionnelles ou ce qui est équivalent de valeurs ordinaires; les valeurs les plus ordinaires étant par exemple celles pour lesquelles $N(r, a) / T(r, f)$ tend vers 1. Cette circonstance se présente presque pour tous les a. Ce résultat, qui justifie pleinement l'introduction de la fonction T, peut être démontré par une méthode très simple, qui, en ce qui concerne les résultats les plus précis, est due à M. Ahlfors. Dans cet ordre d'idées et dans d'autres, la méthode de R. Nevanlinna a déjà suscité de nombreux travaux, notamment de Littlewood, Collingwood, F. Nevanlinna, H. Cartan, Ahlfors, Shimizu, Ullrich; elle permet d'ailleurs de traiter, sans plus de peine, le cas des fonctions méromorphes dans un cercle, c'est-à-dire, moyennant une transformation conforme, des fonctions méromorphes dans un domaine simplement connexe. M. Selberg et moi avons aussi constaté qu'elle s'étend aux fonctions que M. Painlevé avait appelées algébroïdes et qui avaient été surtout étudiées par Remoundos au moyen des méthodes de M. Borel. Enfin, je signalerai que dans un travail datant déjà de quelques années, mais encore inédit, M. H. Cartan a effectué avec succès le retour de la fonction $N(r, a)$ à la fonction $n(r, a)$ en introduisant la dérivée de $T(r, f)$.

Il n'est pas exagéré de dire que, bien que sa fécondité soit loin d'être épuisée, ce procédé nouveau a d'ores et déjà conduit à des résultats qui auraientparu complétement inaccessibles il y a une vingtaine d'années.

La seconde question posée par M. Borel: existe-t-il des propriétés communes des arguments des zéros des fonctions $f(z)-a$ lorsque $f(z)$ est donnée, nécessitait, semblait-il, des méthodes entièrement différentes. Elle ne fut abordée dans toute sa généralité que beaucoup plus tard, il y a un peu plus de douze ans, par M. Julia dont le grand mérite fut de montrer que pour arriver au but, il suffisait d'appliquer dans un esprit nouveau les procédés anciens. Avant de parler de ses résultats et de ceux de ses successeurs, il me sera utile de revenir en arrière pour rappeler à votre souvenir certains travaux importants.

En utilisant la méthode élémentaire qui servit à M. Borel dans sa démonstration du théorème de Picard dans le cas des fonctions entières, MM. Schottky et Landau avaient obtenu en 1904 leurs théorèmes aujourd'hui aussi célèbres que celui de Picard qu'ils fournissent aisément. On sait que ces théorèmes dont l'énoncé est dans toutes les mémoires se traduisent par des inégalités. M. Carathéodory, puis M. Lindelöf, ont mis en évidence que la méthode originale de M. Picard conduit à ces propositions d'une manière naturelle et fournit les meilleures inégalités. Doit-on en déduire qu'il faut définitivement bannir les méthodes dites élémentaires, y compris celle de R. Nevanlinna, qui conduit également aux théorèmes de Landau et Schottky, et utiliser uniquement les méthodes transcendantes, par exemple celle de F. Nevanlinna reposant sur les propriétés de certaines fonctions automorphes et qui peut donner à la fois les propriétés de $T(r, f)$ et les théorèmes du genre Landau-Schottky avec le maximum de précision? Il semble qu'il soit trop tôt pour en décider, surtout si l'on songe que M. Ahlfors vient de mettre le théorème de Picard sous une forme nouvelle plus générale qui avait été prévue en partie par M. A. Bloch et qui ne semble pas pouvoir être obtenue par les procédés transcendants actuels. Toutefois le rapprochement des diverses méthodes fait prévoir que le procédé de l'avenir sera avant tout basé sur la représentation conforme.

Aux théorèmes de Landau et Schottky se rattache l'étude de la classe des fonctions méromorphes dans un domaine et n'y prenant pas trois valeurs exceptionnelles. MM. Carathéodory et Landau avaient reconnu que le théorème de Vitali s'applique à cette classe de fonctions. M. Montel a établi qu'elles forment ce qu'il appelle une famille normale, c'est-à-dire une famille compacte au sens de M. Fréchet. Il en a déduit de nombreuses propriétés sur lesquelles je ne puis insister et une démonstration nouvelle très simple du théorème de Picard. C'est en reprenant cette démonstration et en y ajoutant des remarques qui semblent très simples maintenant qu'elles sont faites, que M. Julia parvint à ses résultats. Dans le cas des fonctions holomorphes autour du point à l'infini, il établissait que le théorème de Picard reste vrai si l'on substitue au voisinage complet du point à l'infini un voisinage plus restreint: par exemple un angle d'ouverture arbitraire et de sommet origine admettant pour bissectrice une demi-droite convenablement choisie; ou même une suite de cercles ayant pour centres certains points convenablement choisis s'éloignant indéfiniment et qui sont vus de l'origine sous un même angle arbitrairement petit. Il étendait ces résultats et beaucoup d'autres analogues aux fonctions méromorphes admettant une valeur asymptotique, et montrait sur de nombreux exemples l'extrême variété des cas qui peuvent se rencontrer.

M. Ostrowski a complété ce théorème dans deux directions: d'abord en montrant qu'il s'étend à toutes les fonctions méromorphes autour du point à l'infini, sauf à une classe restreinte de fonctions d'ordre nul; ensuite en établissant que pour toute fonction non exceptionnelle existe une suite de cercles C_n dont le centre s'éloigne indéfiniment, qui sont vus de l'origine sous un angle qui tend vers o avec $1/n$, tels que, dans chaque C_n l'équation $f(z) = a$ a au moins une solution sauf au plus pour les a représentés dans deux cercles de la sphère de Riemann dont les rayons tendent vers o avec $1/n$.

Ceci est à rapprocher des propositions que M. Milloux obtint par une méthode beaucoup plus directe; les cercles C_n sont ceux qu'il appelle cercles de remplissage et dont il s'est attaché à calculer les rayons minima avec une grande précision en conservant les hypothèses de M. Julia et en tenant compte de la façon dont la fonction tend vers sa valeur asymptotique. En prenant le théorème de Schottky sous sa forme la plus précise, j'ai donné ultérieurement une valeur à peu près exacte de ces rayons dans le cas des fonctions holomorphes, moins bonne pour les fonctions méromorphes d'ordre positif. Dans ce dernier cas et dans des conditions qui rejoignent presque celles de M. Ostrowski, l'approximation de la valeur de ces rayons fut ensuite amenée à un grand degré de précision.

Il est bien clair que les résultats dont il vient d'être parlé rentrent déjà dans le cadre du programme de M. Borel. Bien qu'ils ne puissent guère être améliorés sous la forme où ils sont donnés, ils sont imparfaits à un certain point de vue: leur défaut est de concerner des cercles. Prenons le cas simple de la fonction e^z. Les cercles de remplissage auront leur centre sur l'axe imaginaire, leur rayon sera de l'ordre de K si l'on veut que la fonction y prenne une fois au moins les valeurs dont le module est compris entre e^K et e^{-K}; c'est bien le résultat que fournit très sensiblement la théorie générale; on ne peut donc rien lui demander de plus. L'inconvénient est que, dans ces cercles la fonction prendra $K/2\pi$ fois environ les valeurs de module voisin de 1, etc. Il faudrait donc continuer la dissection de la fonction à l'intérieur de ces cercles, le but à atteindre étant de savoir si, dans le cas général comme dans le cas simple de e^z, les cercles de remplissage contiennent des domaines qui seraient à la fois domaines d'univalence et domaines de remplissage. Les belles propriétés obtenues par M. Ahlfors et que j'ai signalées plus haut permettent déjà d'affirmer qu'il existe dans les cercles de remplissage des domaines d'univalence dans lesquels les valeurs de la fonction couvrent l'un au moins de cinq cercles arbitraires de la sphère de Riemann, extérieurs les uns aux autres. Je crois qu'il doit exister dans les cercles de remplissage des domaines d'univalence dans lesquels les valeurs de la fonction couvrent un domaine formé en supprimant sur la sphère de Riemann deux petits cercles et deux points au plus puis en rendant simplement connexe. Quoiqu'il en soit, on voit que l'on rejoint les recherches des auteurs qui se sont occupés des propriétés de la fonction inverse des fonctions uniformes en se proposant surtout d'effectuer le découpage du plan de la variable en domaines d'univalence, et parmi lesquels il faut citer, après les précurseurs Hurwitz, Denjoy et Boutroux, MM. Iversen, Marty et Shimizu. Mais ce qu'on cherche ici, c'est la possibilité d'effectuer le découpage de façon à mettre en évidence des propriétés métriques des domaines d'univalence restreints obtenus en supprimant les points où les valeurs prises sont voisines de deux valeurs exceptionnelles.

Revenons aux résultats acquis. L'importance de la conception des cercles de remplissage découle de ce qui précède. Il faut signaler à leur sujet que le théorème de Julia est souvent énoncé sous la première forme donnée par son auteur: il existe des angles d'ouverture arbitrairement petite dans lesquels le théorème de Picard s'applique; on appelle alors directions de Julia les bissectrices de tels angles. J'ai proposé de réserver à ces directions le nom de Picard en attribuant celui de Julia à celles qui sont effectivement limites de directions de centres de cercles de remplissage. Il existe en effet des directions de Picard que ne sont pas directions de Julia. En considérant des courbes au lieu de droites, on peut affirmer par exemple que, pour toute fonction méromorphe existe des familles de spirales logarithmiques qui sont courbes de Picard quelle que soit la rotation qu'on leur fait subir autour de l'origine. Mais, lorsqu'une courbe est courbe de Picard sans être courbe de Julia, les domaines d'univalence correspondants peuvent ne fournir qu'une fraction de la sphère de Riemann et ont une grande dimension. On s'en rend compte par exemple en ajoutant à e^z une fonction invariante par la substitution (z, kz), k, de module supérieur à 1 ayant son argument incommensurable à π.

Le théorème de Julia est de nature métrique à un certain point de vue, il nous renseigne sur les dimensions des domaines de remplissage; mais il ne l'est pas en ce qui concerne le nombre des zéros de $f(z)-a$. Il a bien été complété à ce point de vue par M. Saxer, mais d'une manière encore insuffisante. En utilisant la formule de Nevanlinna, j'ai montré qu'on peut le compléter dans le sens du théorème de Borel. En me bornant ici au cas des fonctions d'ordre fini positif ϱ, je signalerai ce résultat: il existe une suite de cercles de remplissage d'ordre ϱ. Ce sont des cercles C_n dont le centre z_n s'éloigne indéfiniment, vus de l'origine sous un angle qui tend vers o, tels que dans C_n, $f(z)$ prend $|z_n|^{\varrho+\varepsilon_n}$ fois toute valeur sauf au plus des valeurs intérieures à deux cercles de rayons η_n de la sphère de Riemann, $|\varepsilon_n|$ et η_n tendant vers o avec $1/n$. M. Milloux a complété ce genre de propositions et a étudié ces cercles d'une manière très précise, même dans le cas de l'ordre infini. De l'existence de tels cercles on déduit celle des demi-droites que j'ai appellées directions de Borel; ce sont les directions limites d'arguments des centres z_n; le théorème de Borel s'applique dans tout angle admettant pour bissectrice une telle direction. Inversement, d'après une importante remarque de M. Rauch, toute direction telle que le théorème de Borel s'applique dans tout angle l'admettant pour bissectrice est direction de Borel; il n'y a plus ici à établir de distinctions analogues à celles dont j'ai parlé à propos des directions de Julia et de Picard, ce qui s'explique par le fait qu'on néglige les suites de zéros dont l'ordre est nul.

Je n'insisterai pas sur les développements auxquels a donné lieu ce théorème qui contient ceux de Julia et de Borel et qui sont dus principalement à M. Milloux; je dirai seulement que, grâce à la précision des énoncés obtenus on peut donner aux résultats une forme analogue à celle que l'on déduisait pour tout le plan des méthodes de Lindelöf: si $f(z)$ est d'ordre précisé $\varrho(r)$, il existe au moins une direction de Borel d'ordre précisé $\varrho(r)$. Pour une fonction entière, il y a au moins deux de ces directions, qu'on peut appeler directions de Borel d'espèce maximum, dès que l'ordre dépasse 1/2. Je me borne aussi à citer en passant que ceci s'étend aux fonctions méromorphes et d'ordre suffisant dans un angle et aux fonctions méromorphes dans un cercle.

Qu'il s'agisse de directions de Picard, de Julia, de Borel des diverses espèces, le gros problème qui se pose est évidemment la détermination de ces directions. Il est peu avancé, on se trouve encore en quelque sorte dans la situation où l'on était à l'époque de Laguerre avant que Poincaré eut découvert l'indice qui fixait le genre; aussi fait-on ce que faisait Laguerre. On cherche à déduire des directions relatives à une fonction celles relatives à certaines fonctions transformées ou voisines; c'est ce qu'ont fait M. Biernacki pour les directions de Julia d'une fonction entière et de sa dérivée, MM. Biernacki et Rauch pour les directions de Borel des fonctions $f(z) + g(z)$, $g(z)$ étant d'ordre inférieur à celui de $f(z)$.

Pour les fonctions entières, on est moins désarmé; la considération de l'ordre de grandeur de la fonction dans une direction et l'emploi d'un théorème de M. Nevanlinna peuvent conduire à des renseignements précieux et à des propositions assez précises dans le cas de l'ordre infini, beaucoup moins précises pour l'ordre fini; à cet ordre d'idées il faut rattacher un théorème qualitatif de M. Bieberbach.

Si $\varrho(r)$ est un ordre précisé convenablement choisi et si l'on considère la fonction de Lindelöf-Phragmén

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|}{r^{\varrho(r)}}$$

dont les propriétés bien connues ont été complétées par M. Pólya, j'ai indiqué que les valeurs θ limitant les angles où $h(\theta)$ est nul donnent des directions de Borel d'espèce maximum; Miss Cartwright a obtenu des propositions beaucoup plus profondes.

On sait que lorsque $\varrho(r) = 1$, la fonction $h(\theta)$ est déterminée par les propriétés du polygone de sommabilité de Borel de la série de Taylor associée à $f(z)$. On doit à M. Pólya de belles recherches sur ce sujet; il a aussi rapproché le fait qu'une série de Taylor suffisamment lacunaire admet son cercle de convergence comme coupure, de celui, démontré par lui, qu'une fonction entière d'ordre infini dont le développement taylorien est suffisamment lacunaire admet toute direction pour direction de Julia. Ses travaux ont conduit M. V. Bernstein a émettre l'hypothèse séduisante que les directions de Julia d'une fonction entière d'ordre précisé 1 sont les directions des sommets du polygone de Borel de la fonction associée, hypothèse qu'il étayait sur un certain nombre de faits. Après avoir constaté que certains exemples mettaient en défaut son énoncé, j'ai pensé qu'il devenait exact en remplaçant les directions de Julia par les directions de Borel d'espèce maximum. Miss Cartwright a fait voir qu'il n'en est rien. Il n'en reste pas moins vrai que ces considérations peuvent donner d'utiles renseignements; Miss Cartwright a montré entre autres propositions que, si la fonction associée à $f(z)$ admet son cercle de convergence comme coupure, $f(z)$ possède au moins quatre directions de Borel d'espèce maximum, mais peut n'avoir que quatre directions de Julia.

Lorsqu'on passe au cas de l'ordre précisé quelconque, les fonctions de Mittag-Leffler ou des fonctions analogues peuvent de même servir à définir des fonctions associées dont les singularités renseignent sur les directions de Borel de $f(z)$.

Dans le cas de l'ordre infini on peut obtenir des résultats analogues et retrouver par cette voie le théorème cité de M. Pólya, on trouve aussi que, si la fonction associée à $f(z)$ construite d'une certaine façon possède une étoile d'holomorphie dont la frontière se compose uniquement de demi-droites dont le prolongement passe par l'origine, ces demi-droites sont les directions de Borel d'espèce maximum de $f(z)$. Est-ce là un cas particulier d'une proposition générale dont l'énoncé est assez évident pour que je l'omette? Après la déconvenue dont j'ai parlé tout à l'heure, il semble prudent de s'abstenir de pronostiquer sur ce point qui appelle de nouvelles recherches.

Un problème d'une nature plus générale est celui de l'étude de la distribution des valeurs de la fonction dans une direction quelconque; je l'ai abordé dans un mémoire récent en utilisant la notion d'ordre moyen dans une direction. Voici ce que j'entends par là: $f(z)$ étant une fonction méromorphe d'ordre fini ϱ pour fixer les idées, on prend une demi-droite Δ passant par l'origine et un angle S admettant Δ pour bissectrice; lorsque l'ouverture de S tend vers o l'exposant de convergence des zéros de $f(z)-a$ situés dans S tend vers une limite $\tau(a)$. On trouve que cette limite a une même valeur $\varrho(\Delta)$ pour tous les a sauf pour certains a exceptionnels; il y a deux a au plus pour lesquels $\tau(a) < \varrho(\Delta)$, mais il peut y en avoir pour lesquels $\tau(a) > \varrho(\Delta)$. Ma démonstration prouve que l'ensemble de ces derniers est au plus de mesure linéaire nulle, c'est pourquoi j'appelle $\varrho(\Delta)$ l'ordre moyen dans la direction Δ. Je ne sais d'ailleurs pas quelles sont les véritables propriétés de cet ensemble exceptionnel sauf si $\varrho(\Delta) = \varrho$, cas dans lequel on retombe sur une direction de Borel. $\varrho(\Delta)$ peut être défini autrement en suivant une idée de M. A. Bloch qui a surtout été mise en œuvre par MM. Shimizu et Ahlfors dans le cas du plan entier. Considérons le secteur formé par les points de S correspondant à $|z| \leqq r$; lorsque z décrit ce secteur le point $f(z)$ décrit sur la sphère de Riemann un domaine à feuillets multiples dont je désigne par $\mu(r, S)$ l'aire totale; si l'on pose

$$\mu(S) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log \mu(r, S)}{\log r}$$

$\varrho(\Delta)$ est la limite de $\mu(S)$ lorsque l'ouverture de S tend vers o.

Bien d'autres questions se posent: quelles sont les propriétés générales des valeurs exceptionnelles dans les diverses directions? Des considérations analogues peuvent-elles être développées dans le cas des fonctions algébroïdes? Etc. Comme toujours, chaque problème résolu soulève des problèmes nouveaux, chaque pas en avant augmente au lieu de le diminuer le nombre des questions qui se posent encore.

Sur les ensembles de points qu'on sait définir effectivement

Par Waclaw Sierpiński, Varsovie

Lorsque nous avons défini un objet particulier p jouissant d'une propriété donnée P, nous disons que nous avons un *exemple effectif* d'un objet jouissant de la propriété P.

Si simple que soit cette notion, quelques faits qui s'y rattachent semblent être un peu ianttendus. C'est surtout son rapport à l'axiome du choix qui n'est pas tel qu'on pourrait le croire au premier coup d'œil.

Lorsqu'il s'agit de donner un exemple effectif d'un objet jouissant d'une propriété donnée P, il y a des cas, où nous savons définir effectivement un objet p, mais nous ne savons pas démontrer sans admettre l'axiome du choix que cet objet p jouit de la propriété P. Tel est p. e. le cas d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu. En 1921, en utilisant, une idée de M. *Hartogs*, j'ai défini effectivement un ensemble bien ordonné E, dont seulement en utilisant l'axiome du choix nous savons démontrer qu'il a la puissance du continu[1]). On pourrait citer ici aussi l'exemple d'une fonction de la troisième classe de *Baire*, au moins si l'on conçoit les classes de *Baire* au sens idéaliste.

Il y a d'autres cas, où nous savons démontrer, sans utiliser l'axiome du choix, qu'il existe des objets jouissant d'une certaine propriété P, mais nous ne savons pas définir effectivement aucun tel objet. Voici un exemple. Nous dirons qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ jouit de la propriété P, ou bien si elle n'est pas continue et satisfait à l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (pour x et y réels), ou bien si toute fonction d'une variable réelle $\varphi(x)$ qui satisfait à l'équation fonctionnelle $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ est continue. Il existe évidemment des fonctions jouissant de la propriété P et leur existence peut être démontrée sans faire appel à l'axiome du choix. Cependent nous ne savons définir effectivement aucune fonction jouissant de la propriété P.

On peut encore dire qu'il y a des cas où nous savons définir effectivement un objet, mais la démonstration que cet objet appartient à un certain ensemble E_1 exige l'application de l'axiome du choix, et, d'autre part, il y a des cas, où nous savons démontrer sans faire appel à l'axiome du choix qu'un ensemble E_2 est non vide, mais nous ne savons pas définir effectivement aucun de ses éléments (même en ad-

[1]) *Fundamenta Mathematicae* t. II, p. 117.

mettant l'axiome du choix pour démontrer que l'objet effectivement défini appartient à E_2).

Il y a aussi des cas, où nous savons démontrer sans faire appel à l'axiome du choix qu'un ensemble E est non vide et où nous savons définir effectivement un objet, dont nous savons démontrer, en utilisant l'axiome du choix, qu'il est un élément de E, mais, quel que soit l'objet donné p, nous ne savons pas démontrer, au moins sans faire appel à l'axiome du choix, qu'il appartient à E. (Il suffirait de prendre pour E la somme de deux ensembles tels que E_1 et E_2, en les supposant disjoints.)

En résumant, on voit que l'*utilisation de l'axiome du choix dans la démonstration d'existence d'un ensemble et la possibilité de choisir un élément de cet ensemble sont des faits indépendants l'un de l'autre.*

Il est à remarquer qu'il y a aussi des cas où nous savons démontrer qu'un ensemble donné E est non vide et où nous savons définir effectivement un objet, mais la démonstration que cet objet appartient à E ne peut être achevée, dans l'état actuel de la Science, que si l'on admet l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$). Tel est p. e. l'ensemble Φ de fonctions d'une variable réelle défini comme il suit. Nous dirons qu'une fonction d'une variable réelle $f(x)$ appartient à Φ ou bien si l'ensemble de toutes les valeurs de $f(x)$ (pour x réels) a une puissance intermédiaire entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$, ou bien si l'ensemble de valeurs de toute fonction d'une variable réelle qui nest pas fini ni dénombrable, a la puissance du continu.

Lorsqu'il s'agit des ensembles non vides dans lesquels nous ne savons choisir aucun élément, il est à remarquer qu'il ne suffit pas, pour obtenir un tel ensemble E, de prendre un ensemble non vide E_1 et un ensemble E_2, dont nous ne savons pas s'il est vide ou non, et de poser $E = E_1$ si E_2 est vide, et $E = E_2$ sinon. *P. e.* si l'on prend pour E_1 l'ensemble de tous les nombres naturels et pour E_2 l'ensemble de tous les exposants pour lesquels le grand théorème de Fermat est faux, nous savons définir effectivement un élément p de E. Il suffit de poser $p = 1$ si le grand théorème de Fermat est vrai et, dans le cas contraire de désigner par p le plus petit exposant pour lequel il est faux. Pour que l'ensemble E jouisse de la propriété désirée, il faut que même dans l'hypothèse que l'ensemble E_2 est non vide, on ne sache choisir aucun élément de E_2.

Peut-on définir *des ensembles de points* de cette nature? Oui, comme l'a démontré M. *Lusin*, mais ces ensembles sont assez compliqués.

Ce sont MM. Emile *Borel* et Henri *Lebesgue* qui ont commencé l'étude systématique des ensembles de points qu'on sait définir effectivement.

En partant des ensembles élémentaires, p. e. des intervalles, et en appliquant un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois les opérations d'addition et de soustraction (resp. de multiplication) d'ensembles, on obtient les ensembles appelés *mesurables B*. Mais, lorsqu'il s'agit des ensembles qu'on sait définir effectivement, ce sont déjà les plus simples classes d'ensembles mesurables B qui présentent des grandes difficultés.

Quels sont les intervalles que nous savons définir effectivement? Pour définir un intervalle, il faut définir ses extrémités. Le problème se réduit donc au suivant: Quels sont les nombres réels que nous savons définir effectivement?

„Une classification des nombres incommensurables vraiment *définissables* s'impose tout d'abord – dit M. Emile *Borel*[2]) – c'est là un sujet très difficile, mais dans lequel la moindre conquête est infiniment précieuse par ses répercussions; on atteint ici la substance vivante elle-même dont sont faits tous les êtres mathématiques; rien n'est plus important que les propriétés du nombre."

Dans cet ordre sont à citer les idées de M. D. *Hilbert*, qui définit les nombres irrationnels au moyen des expressions dites *fonctionnelles* et fait la classification de ces fonctionnelles.

Tout nombre réel x peut être écrit sous la forme

$$x = Ex + \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots\ldots$$

où $n_1, n_2, n_2, \ldots$ est une suite infinie de nombres naturels. Notre problème se réduit donc encore au suivant: *Quelles sont les suites infinies de nombres naturels qu'on sait définir effectivement*? L'étude de ce problème important n'est que commencée. Elle est intimément liée avec l'étude des opérations élémentaires sur les suites infinies d'entiers.

En partant d'un ensemble de points effectivement défini on obtient d'autres ensembles de même nature, en lui appliquant des opérations élémentaires. Sans prétendre d'énumérer ici toutes les opérations connues dont le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de points, nous en donnerons ici quelques exemples. Les plus simples ce sont les opérations de prendre le complémentaire CE d'un ensemble de points E par rapport à l'espace dans lequel il est situé – *opération* C, et l'opération de projetter un ensemble situé dans l'espace à m dimensions sur l'espace à $m-1$ dimensions – *opération* P. Pour que cette dernière opération soit univoque, convenons que la projection du point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m)$ est le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ (la projection d'un ensemble de points étant l'ensemble de projections de ses points).

Ces deux opérations, P et C, appliquées un nombre fini de fois en partant des ensembles fermés situés dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, conduisent aux ensembles de points, appelés par M. Nicolas *Lusin ensembles projectifs*. Les ensembles PF, où F est un ensemble fermé d'un espace à un nombre quelconque de dimensions, coïncident avec les ensembles appelés F_σ (sommes d'infinités

[2] *E. Borel:* Méthodes et problèmes de la th. des fonctions. Paris 1922, p. 146.

dénombrables d'ensembles fermés); les ensembles *CPF* – avec les ensembles G_δ (produits d'infinités dénombrables d'ensembles ouverts) qui jouent, comme on sait, un rôle important dans la théorie des fonctions de variables réelles et dans la topologie. Les ensembles *PCPF* coïncident avec les ensembles *analytiques*, (A), de MM. *Souslin* et *Lusin*. Les ensembles qui sont en même temps *PCPF* et *CPCPF* coïncident avec les ensembles, mesurables *B* (ce qui résulte d'un théorème de *Souslin*). Quant aux ensembles *PCPCPF* on sait qu'ils ne peuvent avoir une puissance intermédiaire entre $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$, mais on ne sait pas s'ils sont tous mesurables *L*. Or, on ne sait rien sur la puissance des ensembles *CPCPCPF*.

Au point de vue qui nous intéresse ici il est à remarquer qu'au moment où l'on a introduit les ensembles mesurables *B* (1905), tous les ensembles de points qu'on savait définir effectivement étaient mesurables *B*, et au moment où MM. *Souslin* et *Lusin* introduisaient les ensembles analytiques (1917), tous les ensembles qu'on savait nommer (mêmes les „monstres artificiellement créés", suivant une expression de M. *Borel*), étaient ou bien analytiques ou bien des complémentaires des ensembles analytiques. Une pareille situation était au moment où M. *Lusin* a introduit (en 1924) les ensembles projectifs.

Mais dès ce moment on savait nommer des ensembles de points qui ne sont pas projectifs: la possibilité de définir de tels ensembles résulte du fait qu'une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles projectifs peut pas être un ensemble projectif. Ce fait a donné lieu à une classification transfinie des ensembles projectifs (comme le font MM. *Kantorovitch* et *Livenson*). Mais on sait aussi nommer des ensembles de points qui n'entrent pas dans cette classification.

Un grand nombre de problèmes de la théorie des ensembles de points se réduit au problème suivant: Examiner s'il existe ou non un ensemble projectif jouissant d'une propriété donnée *P*. Ce problème, comme nous le verrons tout de suite, se réduit à son tour au problème s'il existe ou non des nombres réels jouissant d'une propriété P_1 dépendant de la propriété *P*[3]).

En effet, on sait définir une fonction $f(x)$ qui fait correspondre à tout nombre réel x un ensemble projectif $f(x)$ de sorte qu'on obtient au moins une fois chaque ensemble projectif lorsque x parcourt les nombres réels. Il suffit donc d'appeler P_1 la propriété du nombre réel x qui consiste en ce que l'ensemble $f(x)$ jouit de la propriété *P*.

On peut encore dire que notre problème se réduit au problème si un certain ensemble de nombres réels est vide ou non. Souvent on démontre encore que cet ensemble est projectif et d'une classe déterminée. Parfois même en admettant qu'il est non vide, nous ne savons en choisir aucun élément. Tel est p. e., d'après M. *Lusin*,

[3]) Cf. la méthode de résolvantes de M. *Lusin*.

le cas auquel conduit le problème d'existence des complémentaires analytiques non dénombrables sans sous-ensembles parfaits.

Les ensembles projectifs s'obtenant des ensembles fermés par les opérations élémentaires (par une superposition d'un nombre fini des opérations P et C), le problème quelles sont les ensembles projectifs qu'on sait définir effectivement se réduit donc au problème analogue concernant les ensembles fermés, ou, ce qui revient au même, au problème concernant leurs complémentaires, c'est-à-dire les ensembles *ouverts*. Or, tout ensemble ouvert d'un espace à m dimensions est, comme on sait, la somme de toutes les sphères rationnelles ouvertes qu'il contient (c'est-à-dire des sphères dont le rayon est rationnel et dont le centre a des coordonnées rationnelles), et, d'autre part, on sait nommer une suite infinie,

$$S_1, S_2, S_3, \ldots$$

formée de toutes les sphères rationnelles d'un espace à m dimensions. Ainsi, pour définir un ensemble ouvert, E, il suffit de donner une suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telle que

$$E = S_{n_1} + S_{n_2} + S_{n_3} + \ldots$$

Ainsi le problème quelles sont les ensembles projectifs qu'on sait définir effectivement se réduit au problème dont nous avons déjà parlé plus haut: quelles sont les suites infinies de nombres naturels qu'on sait définir effectivement? Ce problème se présente donc comme fondamental dans les recherches qui nous intéressent.

Mais définir une suite infinie de nombres naturels c'est définir une propriété de ces nombres (la propriété d'appartenir à la suite donnée – si l'on veut). Ainsi notre problème se réduit au suivant:

Quelles sont les propriétés de nombres naturels que nous savons définir effectivement?

Mais revenons aux opérations sur les ensembles de points. Si l'on passe en vue les méthodes de les définir dont nous disposons actuellement, on voit qu'elles sont très peu nombreuses. Parmi eux sont à distinguer, par leur simplicité et en même temps par leur généralité, les opérations du crible, dont l'idée est due à M. *Lusin*.

H étant un ensemble plan et P une propriété des ensembles linéaires, désignons par $\Gamma_P(H)$ l'ensemble de tous les nombres réels a, tels que la droite $x = a$ rencontre l'ensemble plan H en un ensemble linéaire $H(a)$ jouissant de la propriété P. On dit que l'ensemble $E = \Gamma_P(H)$ est obtenu de l'ensemble H comme *criblé au moyen de la propriété P*.

En partant des ensembles H et des propriétés P très simples, on obtient parfois par l'opération du crible des ensembles très compliqués. P. e. en partant des ensembles H fermés et en prenant comme P la propriété de contenir au moins un point à l'ordonnée irrationnelle, on obtient, comme ensembles $\Gamma_P(H)$ (d'après MM. *Kura-*

towski et *Szpilrajn*) tous les ensembles analytiques linéaires. En partant des ensembles H fermés et en prenant comme P la propriété d'être un ensemble dénombrable, on obtient comme ensembles $\Gamma_P(H)$ (comme nous avons démontré avec M. *Mazurkiewicz*) tous les complémentaires analytiques linéaires.

Désignons maintenant, pour les nombres ordinaux α, par P_α la propriété d'un ensemble linéaire, situé sur une parallèle à l'axe d'ordonnées, d'être bien ordonné d'après la grandeur des ordonnées de ses points, du type ordinal α.

Chaque ensemble plan H donné détermine ainsi une suite transfinie d'ensembles linéaires

$$E_\alpha = \Gamma_{P_\alpha}(H).$$

Si l'on prend pour H un ensemble plan fermé convenable (qu'on sait définir effectivement), on obtient pour E_α une suite transfinie d'ensembles mesurables B, dont les classes ne sont limitées par aucun nombre transfini de la seconde classe de *Cantor*. On obtient ainsi des exemples effectifs des ensembles mesurables B d'une classe aussi élevée que l'on veut.

En ce qui concerne les autres opérations connues sur les ensembles de points (comme celle de prendre l'ensemble de toutes les distances entre deux points d'un ensemble donné, ou bien celle de prendre l'ensemble de tous les points linéairement accessibles d'un ensemble donné), il est à remarquer que, effectuées sur les ensembles projectifs, elles donnent toujours les ensembles projectifs. Par conséquent elles n'élargissent pas la famille des ensembles de points que nous savons définir effectivement.

En partant d'une suite infinie d'ensembles effectivement définis $E_1, E_2, E_3, \ldots$, on obtient des nouveaux ensembles, en appliquant à cette suite une opération déterminée $f(E_1, E_2, E_3, \ldots)$. Il s'agit donc de savoir quelles sont les opérations sur une suite infinie d'ensembles que nous savons définir effectivement.

Voici un cas particulier de telles opérations. $n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant une suite infinie donnée de nombres naturels, posons

$$f(E_1, E_2, E_3, \ldots) = E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3} + \ldots$$

A toute suite infinie de nombres naturels effectivement définie correspond donc une opération effectivement définie f sur une suite infinie d'ensembles. On généralise cet exemple, en prenant, au lieu de l'opération $\varphi(E_1, E_2, E_3, \ldots) = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$, une opération φ quelconque effectivement définie et en posant (pour une suite d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ donnée)

$$f(E_1, E_2, E_3, \ldots) = \varphi(E_{n_1}, E_{n_2}, E_{n_3}, \ldots)$$

Ici l'opération f est définie par une suite infinie d'indices, donc, par un nombre réel. Mais on connaît aussi des opérations sur les suites infinies d'ensembles qui sont définies par un ensemble de nombres réels. Telles sont p. e. les opérations de M. *F. Hausdorff*.

Soit M un ensemble donné de nombres réels de l'intervalle (0,1). Posons

$$f_M(E_1, E_2, E_3, \ldots) = \Sigma E_{n_1} E_{n_2} E_{n_3} \ldots,$$

où la sommation Σ s'étend à toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$, telles que le nombre réel

$$x = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2+n_3}} + \ldots$$

appartient à M.

Le problème quelles sont les opérations de M. *Hausdorff* qu'on sait définir effectivement équivaut donc au problème: quels sont les ensembles de nombres réels qu'on sait définir effectivement. L'opération (A) de MM. *Souslin* et *Lusin* peut être regardée comme un cas particulier de l'opération de M. *Hausdorff*. Effectuée sur les intervalles, elle donne tous les ensembles analytiques.

Comme nous savons définir effectivement une suite transfinie du type Ω, E_α ($\alpha < \Omega$), d'ensembles de points sans éléments communs deux à deux, nous pouvons faire correspondre à toute suite transfinie du type Ω de nombres ordinaux $\alpha_\xi < \Omega$ ($\xi < \Omega$) p. e. l'ensemble

$$\sum_{\xi < \Omega} E_{\alpha_\xi}.$$

Toute suite transfinie du type Ω de nombres ordinaux $< \Omega$ que nous savons définir effectivement détermine donc un ensemble de points. Il est évident qu'on obtient ainsi des exemples effectifs d'ensembles de points très compliqués.

Ainsi il y a des problèmes de définitions effectives des ensembles de points qui ne se ramènent pas à nommer des propriétés des suites de nombres naturels, mais qui se ramènent à celles des suites transfinies de nombres ordinaux.

Il y a des cas, où il est possible, mais très difficile de donner un exemple effectif d'un ensemble de points jouissant d'une propriété donnée. Tel est p. e. le cas d'un ensemble plan fermé F de mesure positive, jouissant de la propriété suivante: quel que soit le point p de F, il existe une droite qui a avec F seulement le point p en commun. (Un tel ensemble a été construit par M. *O. Nikodym*.)

Or, il y a beaucoup de cas, où nous ne savons pas, dans l'état actuel de la Science, de donner aucun exemple effectif d'un ensemble jouissant d'une propriété donnée P, même pour les propriétés qui semblent être très simples et qui se présentent tout naturellement dans la théorie des ensembles de points.

Nous ne connaissons p. e. aucun exemple effectif d'un ensemble non dénombrable de points qui ne contienne aucun sous-ensemble parfait. Pareillement pour un ensemble non mesurable au sens de M. *Lebesgue*, aussi pour un ensemble qui est de seconde catégorie de *Baire* dans tout intervalle en même temps que son complémentaire. On ne connaît aucun ensemble plan particulier qui soit coupé par toute droite du plan en deux points. Nous ne connaisonss non plus aucun exemple effectif d'un ensemble non dénombrable de points, dont l'intervalle ne serait pas une image continue. Pareillement pour un ensemble linéaire non dénombrable en même temps que son complémentaire qui contient toute sa translation, abstraction faite d'un ensemble de puissance inférieure à celle du continu. L'existence de tous ces ensembles peut être cependant démontrée à l'aide de l'axiome du choix.

On ne sait pas aussi définir effectivement un ensemble de points de puissance $\aleph_1$, problème qui est avec raison regardé par M. *Lusin* comme une forme affaiblie du problème du continu et aussi loin d'être résolu.

Moins encore que les ensembles de points sont étudiées les familles d'ensembles de points que nous savons définir effectivement. Remarquons ici seulement que nous savons définir effectivement une famille formée de $\aleph_1$ ensembles distincts mesurables *B*. Il en résulte que nous savons nommer $\aleph_1$ fonctions représentables analytiquement; or, nous ne savons pas nommer $\aleph_1$ fonctions distinctes d'une même classe de *Baire*. Nous savons aussi définir effectivement une famille formée de $2^{\aleph_1}$ ensembles de points.

Il est à remarquer encore que nous savons nommer $\aleph_2$ familles distinctes d'ensembles de points, mais nous ne savons pas nommer $\aleph_2$ ensembles de points différents.

Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires

Par S. Bernstein, Kharkow

1° Un des traits caractéristiques les plus frappants de la science moderne est le rôle important qu'elle est obligée de réserver aux schémas de la théorie des probabilités. A première vue cette transformation de la méthode de construction scientifique parait inconciliable avec le principe déterministe de la science classique, d'après lequel, tout phenomène particulier est équivalent à un certain nombre de grandeurs liées par des relations différentielles, fonctionnelles ou autres, telles que l'influence du reste de l'univers sur le phénomène considéré consiste uniquement à fixer un nombre suffisant de ces grandeurs pour fournir les conditions initiales ou aux limites qui déterminent complètement toutes les autres. Or, cette formule déterministe n'est qu'une déclaration invérifiable, puisqu'elle exclut la possibilité de répéter une expérience dans les mêmes conditions, et la science positive a pratiquement appliqué, en général, une formule causaliste un peu différente qui elle-même n'est qu'approximativement compatible avec la précédente. On remplace le phénomène réel par un schéma abstrait caractérisé par les mêmes grandeurs, et on admet que les données aux limites qui déterminent le phénomène peuvent être fixées plus ou moins arbitrairement indépendemment de l'état du reste de l'univers.

Il est évident que le principe déterministe remplacé ainsi par le principe de causalité, seul pratiquement utilisable, ne saurait être rigoureusement et universellement applicable sans tomber en contradiction avec la formule déterministe complète donnée plus haut; de plus, en construisant des schémas abstraits qui décomposent la réalité en parties indépendantes d'une stabilité parfaite, le principe de causalité impose de lui-même la nécessité d'une nouvelle construction logique qui réunirait dans un système de nature différente l'ensemble des phénomènes qu'il déclare indépendants.

Ainsi, par exemple, le fait que le sens du déplacement d'un point mobile sur un axe donné est indépendant du choix de la direction positive sur cet axe, s'exprime par l'affirmation que les deux signes du déplacement sont également probables. De même, l'équivalence des billets d'une loterie donnée et l'indépendance physique de leurs possesseurs du tirage de la loterie admet comme expression mathématique le fait que chacun d'eux a une probabilité de gagner entièrement déterminée par le nombre de billets qu'il possède. Cette indépendence est elle absolue? Certainement, non. Mais les schémas abstraits ainsi construits que l'on appelle stochastiques peuvent aussi bien correspondre à la réalité que n'importe quel schéma causaliste de la science classique qui suppose également son indépendence de tous les autres phénomènes.

D'ailleurs, la théorie mathématique des probabilités fondée sur une base axiomatique simple, exempte de contradictions, conduit, pourvu que le nombre d'observations soit assez grand, à des prévisions pratiquement non moins certaines que celles qui résultent des schémas déterministes, et fournit ainsi une variété infinie de procédés pour vérifier expérimentalement la concordance des schémas stochastiques avec les phénomènes réels qu'ils doivent représenter. Je n'ai pas l'intention de vous entretenir aujourd'hui de cette axiomatique caractérisée par l'affirmation formelle de l'impossibilité d'une réduction parfaite de la réalité à des schémas généraux quels qu'ils soient que j'ai proposée il y a 15 ans. Je remarquerai seulement que mon point de vue qui se dégagera plus nettement de l'exposé qui va suivre, diffère considérablement de la conception empiriste identifiant la probabilité à une fréquence, admise tacitement par la plupart des praticiens et développée systématiquement dans un livre important de M. von Mises. Mais, d'autre part, je tiens à souligner dès à présent que pour les applications effectives de la théorie des probabilités, il est indispensable, à mon avis, de postuler l'équivalence logique de tous les événements ayant la même probabilité mathématique, ce qui équivaut à admettre que la probabilité „*un*" ne doit représenter que la certitude absolue.

Dans ces conditions, lorsque nous obtenons comme résultat de calcul dans les énoncés des théorèmes les plus importants pour les applications, connus sous le nom de lois des grands nombres, que la probabilité d'un évènement A dans une expérience donnée est très petite, inférieure à $\frac{1}{N}$, où N est un nombre entier très grand, cette affirmation signifie simplement qu'il existe au moins N événements incompatibles objectivement équivalents à A (dont la distinction de A ne peut être faite que moyennant une convention indépendante de la marche de l'expérience) parmi lesquels il n'y en a qu'un seul qui se trouve réalisé.

2⁰ Après ces préliminaires un peu longs nous pouvons définir le schéma stochastique élémentaire, comme une expérience idéalisée, où sous des conditions bien déterminées α, l'apparition d'un événement A n'est ni nécessaire, ni impossible et cependant le lien objectif entre les conditions α et l'événement aléatoire A est caractérisé d'une façon complète et univoque par une grandeur scalaire p, nommée probabilité mathématique de A.

Examinons de plus près ce schéma simple. Souvent, on suppose l'expérience considérée non seulement indépendante de toutes les autres circonstances extérieures, mais on admet de plus que les expériences qui se suivent dans les mêmes conditions α sont mutuellement indépendantes. Cette hypothèse fondamentale de Bernoulli, n'est cependant pas la seule logiquement admissible, et il importe de se rendre compte dans ce cas simple de toute la variété des liaisons effectivement possibles entre les phénomènes représentés par un même schéma stochastique stationnaire, c'est-à-dire tel que l'apparition de l'événement A dans chaque expérience admet la même probabilité tant que les résultats des autres expériences restent indéterminés.

Si nous supposons d'abord que la liaison mutuelle entre tous les phénomènes correspondant au schéma stationnaire est *symétrique*, c'est-à-dire indépendante des numéros d'ordre de nos expériences, cette liaison pourra être complètement caractérisée par la fonction $F(n)$ qui exprime la probabilité que l'événement A se reproduira invariablement dans n expériences quelconques choisies arbitrairement. Dans le cas de l'indépendance complète, on aurait $F(n) = p^n$, tandis que dans le cas déterministe, où le résultat d'une seule expérience prédétermine tous les autres, on a $F(n) = p$, quel que soit n. On peut démontrer que dans tous les autres cas, on a $p > F(n) > p^n$, et, de plus, que la fonction $F(n)$ est assujettie, en général, à la seule condition que $(-1)^h \Delta_h F(n) \geq 0$, qui revient à dire que la fonction $F(n)$ est complètement monotone, ou encore, qu'il existe toujours une fonction non décroissante $\psi(t)$, telle que l'on a

$$F(n) = \int_0^1 t^n \, d\psi(t) \tag{1}$$

avec les conditions $1 = \int_0^1 d\psi(t)$, $p = \int_0^1 t \, d\psi(t)$.

Il en résulte que le cas d'indépendance de Bernoulli est actuellement le seul, où la loi des grands nombres est applicable, c'est-à-dire le seul, où la fréquence $\frac{m}{n}$ admet p pour limite stochastique, car, en vertu de l'égalité (1), la probabilité de l'inégalité

$$p_0 < \frac{m}{n} < p_1$$

a pour limite $\psi(p_1) - \psi(p_0)$, lorsque $n \to \infty$.

Je signalerai, comme exemple, le cas, où

$$F(n) = p^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{A+i}{A+ip} \right),$$

A étant une constante positive, considéré dans un ordre d'idées un peu différent par Markoff et plus tard par M. Pólya, qui est intéressant, parce qu'il conduit pour la fréquence $x = \frac{m}{n}$ à la loi de distribution limite

$$C x^{A-1} (1-x)^{B-1}, \text{ où } B = A \frac{1-p}{p},$$

qui, par une transformation linéaire de x, conduit aux types les plus importants des courbes statistiques bien connues de M. Pearson.

3⁰ Les circonstances sont encore beaucoup plus variées, si l'on rejète l'hypothèse de la symétrie, en admettant que les liaisons entre les expériences dépendent, en général, de leurs numéros d'ordre.

Dans ces conditions la loi des grands nombres sera respectée dans des cas très étendus; il est aisé de montrer, par exemple, que pour qu'il en soit ainsi, c'est-à-dire pour que la fréquence $\frac{m}{n}$ ait la probabilité p, comme limite stochastique, il suffit que le cœfficient de corrélation entre deux expériences dont les numéros d'ordre sont assez éloignés tende uniformément vers 0. Cette condition et d'autres analogues qui ne font intervenir que les liaisons entre les expériences considérées deux à deux sont cependant insuffisantes pour assurer la validité du théorème de Laplace. Mais il est digne d'intérêt que, même en admettant une certaine périodicité des liaisons qui entraîne une régularité très considérable dans la succession effective des apparitions de l'évènement A, telle par exemple, que dans chaque suite de 5 expériences, l'événement A, ayant la probabilité $\frac{1}{2}$, se produise, au moins une et au plus quatre fois, on puisse constater néanmoins que la fréquence $\frac{m}{n}$ satisfait à la loi limite de Laplace avec la même dispersion dite normale qui caractérise le cas classique de Bernoulli, de sorte qu'aucune analyse statistique macroscopique ne permettrait de distinguer ces deux cas, et il serait nécessaire d'isoler de petits groupes d'expériences pour déceler la presque périodicité microscopique indiquée de la suite considérée.

Les exemples analogues que nous rencontrerons plus loin, où l'on ne trouve aucune trace des particularités des liaisons élémentaires dans les effets macroscopiques, ont comme base essentielle des propositions de la nature suivante:

Pour que la loi de Laplace-Gauss ($[R]$ désigne la probabilité pour que les relations R aient lieu, et le symbole lim veut dire: limite pour n infini)

$$\lim \left[t_0 \sqrt{B_n} < m - n p < t_1 \sqrt{B_n} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

soit applicable à une suite d'événements A_k de probabilité constante p, où la dispersion $E(m - np)^2 = B_n > M n^l \left(l > \frac{2}{3}\right)$, il suffit que des liaisons intenses quelconques ne soient possibles qu'entre des expériences voisines, telles que la différence i entre leurs numéros d'ordre ne dépasse pas un nombre R ($i \leqq R$), nommé rayon d'activité, où $\frac{R^2}{B_n} \to 0$, pourvu qu'en dehors du rayon d'activité (pour $i > R$), les expériences soient presque indépendantes: c'est-à-dire que la variation de la probabilité de A_k en puisse dépasser $\frac{B_n}{n^2}$, quelsque soient les résultats d'un nombre quelconque d'expériences extérieures au rayon d'activité de l'événement A_k. Cette circonstance se présente, en particulier, dans le cas des chaînes de Markoff, dont nous parlerons plus loin. La propriété que $\frac{R^2}{B_n} \to 0$ est essentielle, car il est aisé de construire des exemples, où le théorème tomberait en défaut, dès que le rayon d'activité devient plus grand (si $\lim \frac{R^2}{B_n} > K > 0$).

Je n'ai pas besoin d'insister que l'hypothèse de la presqu'indépendance introduite ici est, malgré sa grande généralité, bien plus restrictive que celle des coefficients de corrélation tendant uniformément vers 0 qui, comme nous l'avons vu, suffit pour la validité de la loi des grands nombres.

On a des résultats analogues, si le schéma de chaque expérience est plus compliqué et contient un nombre quelconque de grandeurs, dont les valeurs dépendent des différentes issues possibles de l'expérience. Ainsi, par exemple un schéma stochastique parfait contenant n quantités aléatoires continues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera complètement caractérisé par la surface de distribution des probabilités ou de corrélation $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à n dimensions qui, des conditions extérieures déterminées α étant réalisées, possède la même realité objective, comme si les conditions α l'avaient construite matériellement. La signification la plus simple de cette surface, consiste, d'après la loi des grands nombres, en ce qu'elle représente approximativement les fréquences correspondantes des ensembles de valeurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si l'expérience était susceptible d'un nombre suffisamment grand de répétitions. Cependant, sauf des cas de symétrie ou isotropie semblables à ceux qui ont été indiqués au début, les schémas stochastiques parfaits n'apparaissent le plus souvent que comme limites de suites très nombreuses d'expériences représentées par des schémas stochastiques, en général, imparfaits ou incomplètement connus, soit stationnaires, soit dynamiquement variables, suivant une loi suffisamment déterminée.

4⁰ C'est l'étude de la formation de ces schémas limites parfaits qui va nous occuper à présent.

Ainsi, supposons d'abord que l'on considère une succession de quantités aléatoires x_i, ayant la même probabilité d'être positives ou négatives, de sorte que $E\, x_i = 0$, et qui admettent toutes la même dispersion b^2 qui d'ailleurs peut nous être inconnue. La loi des probabilités de x est également inconnue et, peut être, même n'y a-t-il pas de sens d'en parler, comme d'un fait physique déterminé; supposons seulement qu'il soit suffisamment improbable que x devienne trop grand par comparaison à son écart étalon b, ou pour préciser, introduisons une hypothèse déterminée: que

$\frac{E|x|^3}{b^3}$ reste borné, que l'on pourrait élargir de bien des façons. Ces circonstances se présentent, par exemple, pour le déplacement horizontal x pendant un intervalle de temps Δt d'une particule en mouvement brownien. Si l'on admet de plus que ces déplacements x_i sont indépendants, on a, et c'est là un cas particulier typique du théorème de Liapounoff, que, N croissant indéfiniment, la probabilité de l'inégalité

$$S_0 < \sum_1^N x_i < S_1$$

a pour limite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b^2 N}} \int_{s_0}^{s_1} e^{-\frac{s^2}{2b^2 N}} ds.$$

En posant $\frac{t}{\Delta t} = N$, on trouve donc pour le déplacement horizontal total $S(t)$ de la particule pendant un temps t, la loi de probabilité limite

$$\sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi b^2 t}}\, e^{-\frac{s^2 \Delta t}{2b^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}}\, e^{-\frac{s^2}{4Dt}}, \text{ où } D = \frac{b^2}{2\Delta t}.$$

On obtient ainsi la formule connue du mouvement brownien comme conséquence du théorème de Liapounoff, et la constante de diffusion D pouvant être déterminée expérimentalement, on en déduit la valeur de b^2.

Seulement il faut observer que cette formule ne saurait être rigoureusement exacte, puis qu'il n'est pas permis de faire tendre Δt vers zéro. En effet, la vitesse moyenne pendant le temps Δt de la particule est finie $\frac{x_i}{\Delta t} < c$, où c est la vitesse de la lumière; donc $b^2 < c^2 \Delta t^2$, et, par conséquent, on doit avoir $\Delta t > \frac{2D}{c^2}$.

D'ailleurs, l'hypothèse de l'indépendance des déplacements voisins x_i paraît a priori inadmissible pour des intervalles Δt suffisamment petits, et il est naturel de se demander, si on ne pourrait pas donner une interprétation microscopique plus satisfaisante de la loi macroscopique de diffusion en utilisant les généralisations du théorème de Liapounoff, analogues à celle que nous avons indiquée plus haut pour le théorème de Laplace.

Il serait trop long de détailler ici ces généralisations, applicables à un nombre quelconque de variables aléatoires qui servent, en particulier, de fondement à la théorie de la corrélation normale; l'idée essentielle de ces résultats se dégagner assez clairement, je l'espère, de l'énoncé suivant.

Soient deux suites, pour fixer les idées, de grandeurs aléatoires: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Soit

$$E\sum_1^n x_i = E\sum_1^n y_i = 0,\; E\left(\sum_1^n x_i\right)^2 = A_n^2,\; E\left(\sum_1^n y_i\right)^2 = C_n^2,$$

$$E\left[\left(\sum_1^n x_i\right)\left(\sum_1^n y_i\right)\right] = R_n A_n C_n.$$

En admettant que x_i, x_K, y_i, y_K ne peuvent être liées d'une façon sensible que tant que $\frac{|i-k|}{A_n} L \to 0, \frac{|i-k|}{C_n} M \to 0$, où L et M sont les maxima respectifs de $|x_i|$ et $|y_i|$, et qu'en dehors de ce voisinage les quantités x et y deviennent presqu'indépendantes dans un sens analogue à celui, que nous avons défini antérieurement, la probabilité des inégalités simultanées

$$t_0 A_n < \sum_1^n x_i < t_1 A_n$$

$$t_0' C_n < \sum_1^n y_i < t_1' C_n$$

a pour limite

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_n^2}} \int_{t_0'}^{t_1'}\int_{t_0}^{t_1} e^{-\frac{t^2+t'^2-2R_n t t'}{2(1-R_n^2)}}\, dt\, dt',$$

pour $n \to \infty$.

Nous voyons ainsi que dans des cas très étendus, l'itération d'expériences mutuellement liées, représentées par des schémas stochastiques extrêmement variés, qui peuvent être imparfaits, pourvu qu'elles deviennent presqu'indépendantes, à l'extérieur d'un domaine d'activité suffisamment petit, conduit à des schémas stochastiques parfaits bien déterminés dans lesquels la corrélation normale et la loi de Gauss, en particulier, apparaissent comme des lois de la nature d'un caractère aussi universel que le principe de l'inertie en mécanique.

C'est donc un mérite incontestable de Galton et de M. Pearson d'avoir fondé et développé l'étude de la corrélation normale et d'avoir prévu leur importance pour les applications; mais ce n'est que grâce à des propositions analogues à celle qui vient d'être énoncée que cette prévision reçoit une justification mathématique satisfaisante et que nous pouvons nous rendre compte, par exemple, de la raison profonde de l'existence approximative de la corrélation normale entre les grandeurs de divers organes chez les êtres vivants, ainsi que de l'applicabilité approchée aux propriétés qui dépendent de plusieurs gênes de la loi de régression héréditaire de Galton. D'ailleurs, cette loi d'hérédité de Galton qui suppose que le coefficient de corrélation entre les générations successives diminue en progression géométrique, fournit le premier exemple de chaînes stochastiques dont l'étude mathématique a été fondée par Markoff sur une base toute différente.

En revenant au mouvement brownien nous pourrions déduire de la proposition citée appliquée à une seule grandeur une variété infinie de schémas microscopiques qui conduirait à la même formule de diffusion. Les expériences macroscopiques ordinaires ne permettraient pas de faire le choix entre ces différentes interprétations, mais, s'il était possible d'éffectuer une sorte de filtration des déplacements microscopiques, correspondant à des durées de temps assez courtes pour que la loi de diffusion soit encore inapplicable, on serait amené probablement à remplacer l'hypothèse de l'indépendance complète par une autre plus conforme à la réalité.

Ainsi, par exemple, pour faire une hypothèse mathématique précise aussi simple que possible, on pourrait supposer que

$$x_{i+1} = \left(1 - \frac{1}{A}\right) x_i + a_{i+1}, \tag{2}$$

où a_{i+1} est une quantité aléatoire indépendante de x_i avec $E\, a_i = 0$, $E\, a_i^2 = \beta^2$, $\frac{E\,|\,a_i\,|^3}{\beta^3}$ borné, $A \geq 1$ étant une constante que nous supposerons ensuite très grande, pour tenir compte de l'inertie de la particule pendant des intervalles de temps très petits. Un calcul facile montre alors que $S_N = \sum_1^N x_i$ satisfait pour $N = \frac{t}{\Delta t}$ très grand à la formule de diffusion avec $D = \frac{A^2 \beta^2}{2\, \Delta t}$, et, si on admet de plus que $A\, \Delta t \to 0$, la différence $S_{N_1} - S_{N_0}$ (où $N_1 > N_0$) satisfera également à la loi de Gauss avec la dispersion $\frac{A^2 \beta^2}{\Delta t} (N_1 - N_0) = 2\, D\, (t_1 - t_0)$, comme dans le cas de l'indépendance complète des déplacements x_i; donc, toutes les conséquences macroscopiques seront les mêmes. L'augmentation de A permet de diminuer la dispersion élémentaire $b^2 = \frac{A\, \beta^2}{2 - \frac{1}{A}} \backsim \frac{D}{A}\, \Delta\, t$ du déplacement x_i, et par conséquent, d'envisager des intervalles de temps $\Delta\, t$ plus petits sans introduire des vitesses inadmissibles; mais la condition $A\, \Delta\, t \to 0$ (nécessaire pour la concordance des effets macroscopiques) exclut la possibilité de faire b^2 de l'ordre de $\Delta\, t^2$; le passage rigoureux à la limite $\Delta\, t \to 0$ reste donc toujours mécaniquement illégitime, amenant des vitesses infinies.

J'ai insisté un peu longuement sur la discussion de ce cas typique simple pour mettre en évidence que l'emploi des relations différentielles dont nous parlerons tout à l'heure, introduit par les physiciens MM. Einstein, Smoluchowsky, Fokker et Planck pour l'étude des liaisons stochastiques qui joue un rôle important dans la théorie moderne des probabilités, doit être considéré surtout, comme une puissante méthode technique, qui ne devrait pas nous laisser perdre de vue le caractère essentiellement discontinu du mécanisme microscopique de la formation des schémas stochastiques qui échappe à la représentation différentielle.

5⁰ Ainsi, sous les réserves indiquées au sujet de sa signification mécanique, on peut définir a priori une variable aléatoire $S(t) = \lim\limits_{n=\infty} \underset{N=nt}{S}$ dépendant de t qui satisfera rigoureusement à la loi limite

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{s^2}{4Dt}},$$

en jouissant, conformément aux résultats précédents, de la propriété que les valeurs de $S(t)$ à des moments différents t_0 et $t_1 > t_0$ se trouvent en correlation normale, ayant pour coefficient de corrélation $R(t_0, t_1) = \sqrt{\frac{t_1}{t_0}}$, ce qui signifie que $S_0 = S(t_0)$ étant fixé, la loi conditionelle des probabilités de $S(t_1)$ ou loi de passage est

$$w(s_0, t_0, s_1, t_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1 - t_0)}} e^{-\frac{(s_1-s_0)^2}{4D(t_1-t_0)}}, \tag{3}$$

quelles que soient les valeurs de $S(t)$ aux moments $t < t_0$. Lorsque cette dernière circonstance se présente, c'est-à-dire, si la probabilité du passage de $S_0(t_0)$ à $S_1(t_1)$ est indépendante des états de $S(t)$ antérieurs à t_0, dès que la valeur $S_0(t_0)$ est fixée, on dit que les valeurs de $S(t)$ forment une chaîne. Lorsque, en plus, comme ici, la corrélation est normale nous dirons que la chaîne est normale. Dans ce dernier cas, on a $R(t_0, t_1) = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_1)}$, où $\varphi(t)$ est une fonction arbitraire croissante.

Si l'espérance mathématique $E\,S(t) = f(t)$ est une fonction continue ainsi que $R(t_0, t)$ et que de plus $R(t, t) = 1$, comme cela a lieu actuellement, nous dirons que la variable aléatoire $S(t)$ est une fonction *quasi continue* ou stochastiquement continue de t. Je crois qu'il est préférable de ne pas employer ici le terme ordinaire de continuité. En effet, il est facile de montrer, par exemple, dans le cas actuel que la probabilité des inégalités simultanées $|S - S_0| < |x - x_0|^{\frac{1}{2}-\alpha}$ pour toutes les valeurs de $t_0 < T$, tend vers 1, quel que soit $\alpha > 0$, lorsque $t - t_0$ tend vers 0; mais, d'autre part, il est aisé de voir que, si la variable aléatoire $S(t)$ est liée en chaîne, il n'est pas possible de fixer un module de continuité $\omega(\varDelta t)$ tel que l'inégalité

$$\varDelta S < \omega(\varDelta t)$$

soit certaine.

La turbulence de la variable aléatoire dépend essentiellement du coefficient de corrélation $R(t_0, t_1)$; si l'on veut, par exemple, que la variable quasi continue $S(t)$ possède une dérivée stochastique (ce qui, dans le cas d'une chaîne, ne saurait se présenter qu'en des points isolés), il faut que l'on ait $\left[\frac{\partial R(t_0,t)}{\partial t}\right]_{t=t_0} = 0$. Ainsi, si dans l'équation (2) nous rejetons la condition $A\,\Delta t = \frac{A}{n} \to 0$, en supposant au contraire, $\frac{1}{A} = 0$, de sorte qu'elle prend la forme

$$\Delta_2 S_{i-1} = a_{i+1},$$

on voit que, n croissant indéfiniment, les valeurs de $S(t)$ aux différents moments sont encore en corrélation normale, mais la variable $S(t)$ ne forme plus une chaîne, le cœfficient de corrélation ayant pour valeur

$$R(t_0,t_1) = \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{t_0}{t_1}\right],$$

$$\left[R(t,t) = 1,\ \frac{\partial}{\partial t} R(t,t) = 0\right];$$

on peut montrer que, $t_2 - t_0$ étant pris suffisamment petit, la probabilité de l'inégalité

$$\left[\frac{S(t_1) - S(t_0)}{t_1 - t_0} - \frac{S(t_2) - S(t_0)}{t_2 - t_0}\right] < \varepsilon,$$

où ε est un nombre positif donné et $t_0 < t_1 < t_2$, devient aussi voisine de 1 qu'on le veut.

Sans insister sur les propriétés des variables aléatoires, quasi continues analogues à celle là, j'observerai que, $S(t_0)$ et $S(t_1)$ étant fixées, la loi des probabilités de $S(t_2)$ dépendra actuellement des valeurs de $S(t)$ antérieures à t_0, mais cette dépendance sera d'autant plus faible que t_1, sera voisin de t_0; l'introduction d'une variable auxiliaire $S'(t)$ (dont l'observation simultanée avec $S(t)$ pourrait ne pas être réalisable) permettrait de former une chaîne double. En tout cas la loi de $S(t_h)$ ne saurait jamais être indépendante des valeurs de $S(t)$ pour $t < t_0$, lorsque $S(t_0)$, $S(t_1) \ldots S(t_{h-1})$ sont données en des points arbitraires $t_0 < t_1 < \ldots < t_{h-1} < t_h$, sans que cette loi soit complètement déterminée par la valeur unique $S(t_{h-1})$, c'est-à-dire sans représenter une chaîne, d'après la définition précédente.

Un des problèmes typiques les plus importants qui se présentent au sujet des variables aléatoires stochastiquement continues est, par exemple, celui de la détermination de la probabilité $P_{a,b}$ que a $< S(t_1) < b$, si, outre la condition $S(0) = 0$ on exige que $S(t)$ satisfasse aux inégalités $F_1(t) < S(t) < F_2(t)$ pour toute valeur positive de $t < t_1$, où $F_1(t)$, $F_2(t)$ sont deux fonctions données de t.

L'étude directe de ces problèmes par les anciennes méthodes de la théorie des probabilités est, en général, assez pénible, se ramenant à la recherche de la limite de certaines intégrales multiples d'ordre infiniment croissants qui s'expriment explicitement au moyen de la surface de corrélation, connue, par hypothèse, entre les valeurs successives de la variable aléatoire considérée.

Au contraire, l'utilisation des équations linéaires aux dérivées partielles s'est montrée très féconde pour la résolution des problèmes de ce genre qui se rencontrent souvent en physique.

Je résumerai, à titre d'exemple, la solution du problème indiqué pour le cas fondamental, correspondant à la loi de diffusion, d'après M. Kolmogoroff, qui a le plus contribué au développement mathématique de la méthode.

Il est bien connu et facile de vérifier que la probabilité de passage $w(s_0, t_0, s_1, t_1)$ donnée par la formule (3) satisfait, comme fonction de s_1 et t_1 à l'équation

$$D\frac{\partial^2 w}{\partial s_1^2} = \frac{\partial w}{\partial t_1},$$

et considérée, comme fonction du lieu s_0 et du moment t_0 de départ, elle satisfait à l'équation conjuguée

$$D\frac{\partial^2 w}{\partial s_0^2} = -\frac{\partial w}{\partial t_0} \tag{4}$$

Il est à peu près évident que, si l'on pose $P_{a,b} = P_{a,b}(0, 0)$, la probabilité $P_{a,b}(s_0, t_0)$ considérée comme fonction de (s_0, t_0), satisfera également à la dernière équation pour toutes les valeurs de (s_0, t_0) de la région ω limitée par les droites $t = 0$ et $t = t_1$, et par les courbes $s = F_1(t)$ et $s = F_2(t)$. La fonction $P_{a,b}(s_0, t_0)$ pourra ainsi être déterminée, comme la solution de l'équation (4) satisfaisant aux conditions aux limites $P_{a,b}(s, t_1) = 1$, si $a < s < b$, et $P_{a,b}(s, t_1) = 0$, si $s < a$ ou si $s > b$, ainsi que $P_{a,b}[F_1(t), t] = P_{a,b}[F_2(t), t] = 0$.

Toutes les fois, où la loi de probabilités de passage de la chaîne satisfera à une équation analogue du type parabolique, la même méthode sera applicable. Mais le cas le plus simple et aussi, sans doute, le plus important est celui, où la loi de passage est une loi de Gauss; il se ramène alors formellement par un changement de variables évident au cas qui vient d'être examiné.

On reconnaît, de plus, facilement que si la dispersion de cette loi est une fonction de $t_1 - t_0$ seulement, elle est nécessairement de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1 - t_0)}}\, e^{-\frac{[s_1 - s_0 - f(t_1) + f(t_0)]^2}{2D(t_1 - t_0)}}$$

et correspond ainsi au cas, où la variable S est, comme précédemment, la limite d'une somme S_N de quantités ΔS_i de dispersion constante, pouvant, en outre, posséder des espérances mathématiques dépendant de t.

Un autre cas intéressant est celui, où c'est le coefficient de corrélation $R(t_0, t_1)$ qui est fonction de $t_1 - t_0$ seulement. Puisque dans le cas d'une chaîne normale on a toujours, comme nous l'avons vu, $R(t_0, t_1) = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_1)}$, il est aisé de montrer que l'on doît avoir actuellement $R(t_0, t_1) = \varrho^{t_1 - t_0}$; le coefficient de corrélation décroîtra ainsi en progression géométrique avec le temps.

D'ailleurs, la variable aléatoire $S(t)$ liée en chaîne normale la plus générale peut être obtenue comme limite de la somme S_N de quantités aléatoires dépendantes $\Delta S_i = S_{i+1} - S_i$; définies par les relations

$$\Delta S_i = c_i S_i \Delta t + \alpha_i, \tag{5}$$

où c_i est une fonction donnée de i (ou de t), et α_i des quantités indépendantes de S_i telles que $E\alpha_i \backsim a_i \Delta t, E\alpha_i^2 \backsim b_i \Delta t, \frac{E|\alpha_i|^3}{\Delta t^{\frac{3}{2}}} \to 0$, a_i et b_i étant des fonctions finies de t.

Lorsque $c_i = c \neq 0$ et $b_i = b$ sont des constantes, on trouve justement le coefficient de corrélation $R(t_0, t_1) = \varrho^{t_1 - t_0} = e^{|c(t_1 - t_0)|}$, tandis que pour $c \to 0$ on retombe dans le cas précédent correspondant au mouvement brownien.

La considération d'équations analogues linéaires aux différences finies à plusieures variables conduit pareillement à des chaînes multiples dont la loi limite est encore la corrélation normale. Dans ce cas important, le passage à la limite peut être fait rigoureusement et explicitement par les méthodes classiques. Il n'en sera plus de même, si l'équation (5) est remplacée par une équation non-linéaire.

Cette fois, la loi limite des probabilités ne sera plus une loi de Gauss, et on n'a même pas encore donné, autant que je sache, de démonstration rigoureuse suffisamment générale de son existence. Pour obtenir la loi limite des probabilités $p(s, t)$ on admet, au contraire, a priori que cette loi existe, et, de plus, qu'elle est représentée par une fonction possédant des dérivées jusqu'à un certain ordre; dans ces conditions, on démontre que celle-ci satisfait à une certaine équation aux dérivées partielles l'équation de Fokker et Planck.

Vu l'importance de cette méthode, je résumerai brièvement la déduction générale de l'équation de Fokker-Planck que je présenterai sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne habituellement, en introduisant, comme fonction inconnue, la probabilité intégrale $P(s_1, t_1) = [\, s < s_1 \,]$ au moment t_1 au lieu de la densité des probabilités $p(s_1, t_1) = \frac{\partial P(s_1, t_1)}{\partial s_1}$, ce qui permet de ne pas supposer cette dernière deux fois dérivable.

La signe $E_s(u)$ désignant l'espérance mathématique de u, lorsque S est donné, admettons seulement que

$$\lim_{\Delta t = 0} E_s\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = f(s, t), \lim_{\Delta t = 0} E_s\left(\frac{\Delta s^2}{\Delta t}\right) = B^2(s, t), \lim_{\Delta t = 0} E_s\left(\frac{\Delta s^3}{\Delta t}\right) = 0.$$

où les fonctions f et B sont continues, ainsi que $\frac{\partial B}{\partial s}$; supposons, en outre, que $P(s,t)$ est continue et bornée avec ses dérivées des deux premiers ordres. Introduisons ensuite une fonction arbitraire $F(s)$ trois fois dérivable, s'annullant à l'infini avec ses dérivées et telle que les espérances mathématiques correspondantes aient un sens. Dans ces conditions, on a

$$\lim E\left[\frac{F(s+\Delta s)-F(s)}{\Delta t}\right]=\lim E\left[F'(s)\frac{\Delta s}{\Delta t}+\frac{1}{2}F''(s)\frac{\Delta s^2}{\Delta t}\right].$$

Or, le premier membre est égal à

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)\frac{\partial^2 P(s,t)}{\partial s\,\partial t}\,ds=-\int_{-\infty}^{\infty} F'(s)\,\frac{\partial P(s,t)}{\partial t}\,ds$$

et le second membre est

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[F'(s)\,f(s,t)+\frac{1}{2}F''(s)\,B^2(s,t)\right]\frac{\partial P(s,t)}{\partial s}\,ds=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(s)\left[f(s,t)\frac{\partial P(s,t)}{\partial s}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\,B^2(s,t)\,\frac{\partial P(s,t)}{\partial s}\right]ds;$$

donc, le caractère arbitraire de $F'(s)$ amène, comme conséquence nécessaire, à l'identité

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial t}=-f(s,t)\,\frac{\partial P(s,t)}{\partial s}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left[B^2(s,t)\,\frac{\partial P(s,t)}{\partial s}\right].$$

L'équation de Fokker-Planck se déduit de celle là par différentiation par rapport à s, si l'on admet, en plus, l'existence et la continuité de $\frac{\partial f}{\partial s}$ et $\frac{\partial^2 B}{\partial s^2}$:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial s}(fp)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}(B^2 p).$$

La probabilité de passage $p(s_0, t_0, s, t)$ de la valeur s_0 au moment t_0 à la valeur s au moment t satisfait à cette équation; considérée, comme fonction s_0, t_0, elle satisfait à une équation analogue conjuguée de la précédente. Le cas de plusieurs variables se traite d'une façon semblable.

Observons, d'ailleurs, que, d'après la définition même de la chaîne, la fonction $p(s_0, t_0, s, t)$ satisfait à la relation intégrale

$$p(s_0, t_0, s_2, t_2)=\int_{\infty}^{\infty} p(s_0, t_0, s_1, t_1)\;p(s_1, t_1, s_2, t_2)\,ds,\quad (t_0<t_1<t_2)$$

introduite par M. Chapman et considérée antérieurement par Smoluchowsky dans le cas particulier, où la probabilité de passage est de la forme $p(s_0, s, t - t_0)$. Dans un mémoire tout récent que je n'ai pas eu le temps d'examiner en détail, M. Hostinský étudie directement cette équation intégrale sans introduire les hypothèses spéciales qui précèdent, et la solution sous forme de série qu'il en donne, ne satisfait pas nécessairement à l'équation aux dérivées partielles de Fokker-Planck; il serait intéressant, comme l'indique M. Hostinský, de discuter d'une façon complète les conditions nécessaires et suffisantes pour que $p(s_0, t_0, s, t)$ satisfasse à l'équation de Planck.

6⁰ L'équation de M. Chapman pour le cas, où $t_0 < t_1 < t_2$ sont des moments successifs entre les-quels on ne peut interposer, tout au plus, qu'un nombre limité de termes, représente la définition des chaînes discrètes, dont les propriétés essentielles ont été découvertes par Markoff dans une série de travaux remarquables (antérieurs aux recherches des physiciens nommés plus haut) consacrés au cas, où la variable aléatoire $S(t_i) = x_i$ ne prend qu'un nombre limité de valeurs: $a_1, a_2, \ldots, a_h$.

Grace aux développements qu'ont reçu les idées de Markoff dans les travaux récents de MM. Romanowsky, Hostinský, Fréchet et v. Mises, la théorie des chaînes discrètes de Markoff est devenu un des chapitres les plus parfaits du calcul classique des probabilités, susceptible de nombreuses applications et de diverses généralisations.

D'après Markoff, une suite de quantités x_i forme une chaîne simple, si on a une succession d'expériences stochastiques E_i admettant h issues possibles, correspondant, respectivement, aux h égalités $x_i = a_k^{(i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, h)$, et telles que les probabilités $p_{k,e}^{(i+1)}$ des égalités $x_{i+1} = a_e^{(i+1)}$ sont bien déterminées, quels que soient les résultats des expériences antérieures, dès qu'il est établi que l'expérience E_i a amené l'égalité $x_i = a_k^{(i)}$, de sorte que le schéma de l'expérience E_{i+1}, devient parfait, lorsque le résultat de l'expérience E_i est fixé. Dans le cas des suites quelconques la probabilité de l'égalité $x_{i+1} = a_e^{(i+1)}$ pourrait dépendre des expériences antérieures; on peut donc définir avec Markoff, comme première généralisation de la chaîne simple, une chaîne du second ordre par la propriété que la probabilité de l'égalité $x_{i+1} = a_e^{(i+1)}$ ne dépend, en plus, que du résultat de l'expérience E_{i-1}.

L'étude des chaînes d'ordre supérieur ainsi que des chaînes multiples contenant plusieures variables peut être ramenée formellement à celle des chaînes simples par l'introduction, pour le cas du second ordre, pas exemple, de la nouvelle variable $z_i = \lambda x_i + \mu x_{i-1}$, où λ et μ sont deux paramètres arbitraires, qui prend h^2 valeurs $\lambda a_k^{(i)} + \mu a_e^{(i-1)}$. Ainsi dans l'aperçu général qui va suivre nous pouvons nous borner aux chaînes simples sans nous arrêter sur quelques particularités intéressantes des chaînes d'ordre supérieur.

Un problème fondamental qui se pose est la question de l'existence d'une loi limite des probabilités des égalités $x_n = a_e^{(n)}$ indépendante de la loi des probabilités des égalités initiales $x_1 = a_e^{(1)}$. Son étude relève de la théorie des équations linéaires aux différences finies, et pour simplifier, nous allons nous borner au cas important, où les probabilités de passage $p_{k,e}^{(i+1)} = p_{k,e} \geqq 0$, ainsi que les valeurs $a_e^{(i)}$ ne dépendent pas de i. Dans ces conditions, $P_e^{(n)}$ désignant la probabilité de l'égalité $x_n = a_e$ à la n-ième expérience, on a manifestement

$$P_e^{(n+1)} = \sum_1^h P_i^{(n)} p_{i\,e}, \tag{6}$$

avec $\sum_{e=1}^h p_{ie} = 1$ qui exprime que les valeurs a_e sont les seules possibles. Il en résulte que le système de h équations homogènes à h inconnues P_i

$$P_e = \sum_{i=1}^h P_0\, p_{i\,h} \tag{7}$$

admet nécessairement un système de solutions, différentes de 0, tel que $\sum_1^h P_i = 1$, et on démontre par des considérations élémentaires qu'il y en a toujours au moins un tel que $P_i \geq 0$.

Donc, quelles que soient les probabilités de passage $p_{ie} \geq 0$, un état stationnaire de la chaîne est toujours possible, et il sera réalisé, si $P_i^{(1)} = P_i$ dans la première expérience. C'est d'ailleurs évident dans le cas simple très important, où $p_{ik} = p_{ki}$, c'est-à-dire, lorsque la probabilité du passage de a_i à a_k est la même que celle du passage inverse; la solution stationnaire toujours possible sera alors la distribution uniforme $P_i = \frac{1}{h}$.

Pour que le système de solutions de (7), correspondant à l'état stationnaire soit unique, il est nécessaire et suffisant que l'unité qui est toujours une racine de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda\, p_{21} \cdots p_{h1} \\ p_{12} \cdots\cdots\cdots p_{h2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{1h} \cdots\cdots p_{hh}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

soit une racine simple de cette équation. D'après M. v. Mises, cette condition est équivalente au fait que la matrice $\| p_{ik} \|$ est non décomposable, c'est-à-dire que, quels que soient i et k, le passage de a_i à a_k dans un sens au moins soit toujours possible après un nombre fini assez grand d'expériences: pour éviter ce cas d'exception il suffirait donc, qu'on n'ait pas simultanément $p_{ik} = 0$ et $p_{ki} = 0$.

Le cas particulier important, où tous les $p_{ik} > 0$, avait déjà été complètement étudié par Markoff qui a montré que dans ces conditions on a non seulement un système stationnaire unique P_i, mais que l'on a aussi $\lim_{n=\infty} P_i^{(n)} = P_i$, quelle que soit la distribution des probabilités initiales, de sorte que la fréquence limite P_i des égalités $x_n = a_i$ est a priori complètement déterminée par la matrice des probabilités de passage $p_{ik} > 0$.

Cependant, en général, l'existence d'un système stationnaire unique n'implique pas qu'il servira de limite à tous les systèmes dynamiques, ce qui est évident, par exemple, pour la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Pour que tous les systèmes dynamiques tendent vers le système stationnaire unique, il est nécessaire et suffisant que l'équation caractéristique ne possède pas d'autre racine que 1 de module *un*. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, lorsqu'il existera une puissance m de la matrice fondamentale qui sera décomposable, comme cela a lieu, par exemple, pour la matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \beta & 0 \end{vmatrix}$$

le système dynamique au lieu d'avoir nécessairement pour limite l'état stationnaire, tendra, en général, à se reproduire périodiquement avec une période égale à m (qui est 2 dans notre exemple).

Cependant, même dans ce dernier cas la fréquence moyenne des égalités $x_n = a_e$ dans l'ensemble des expériences tendra, quelles que soient les conditions initiales, vers la même limite P_e qui correspond à l'état stationnaire. Seulement le théorème limite généralisé de Liapounoff ne sera plus, en général, applicable à la somme $\sum_1^n x_i$. Je n'insisterai pas ici sur les conditions suffisantes plus ou moins larges pour la validité de ce dernier théorème, en me bornant à observer que dans l'hypothèse de Markoff $p_{ik}^{(n)} > a > 0$ et, même, lorsque les nombres $p_{ik}^{(n)}$ tendent vers 0 assez lentement, il est une conséquence de la proposition générale mentionnée antérieurement.

7⁰ L'étude du cas, où x_e peut prendre une infinité de valeur, se traite par un passage à la limite, la théorie des équations intégrales de Fredholm fournissant un appareil mathématique parfaitement adapté à cette étude dans le cas ou moins, où l'ensemble des valeurs possibles est continu et borné. En supposant, pour fixer les idées, que l'on a $a \leq x_e \leq b$, l'équation (6) se trouve remplacée par

$$P_{n+1}(x_{n+1}) = \int_a^b P_n(x_n)\, f(x_n, x_{n+1})\, d\, x_n,$$

où la probabilité $f(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ de passage de x_n à x_{n+1} est assujettie à la condition $\int_a^b f(x_n, x_{n+1})\, d\, x_{n+1} = 1$; la distribution stationnaire est déterminée par l'équation

$$P(x) = \int_a^b P(y)\, f(y, x)\, d\, y, \qquad \left[\int_a^b P(x)\, d\, x = 1\right]$$

et on démontre facilement que dans les conditions de Markoff: $f(y, x) > 0$, elle est unique, et de plus, que $P_n(x) \to P(x)$, quelle que soit la distribution initiale $P_1(x_1)$. En particulier, il est évident que l'on aura $P(x) = \frac{1}{b-a}$, si $f(y, x)$ est symétrique. Ce résultat général, s'appliquant à un domaine fini à un nombre quelconque de dimensions, justifie dans des cas très étendus l'hypothèse de la distribution uniforme des probabilités.

Le cas, où les limites (a, b) deviennent infinies présente une exception qui mérite d'être signalée.

Il est aisé de montrer, en effet, que la fonction positive et continue $f(y, x)$ étant symétrique, on a, quelles que soient les valeurs données α et β et quelque petit que soit ε

$$\int_\alpha^\beta P_n(x)\, d\, x < \varepsilon,$$

pourvu que n soit assez grand. Ainsi, la variable aléatoire finirait par disparaître de tout domaine fini donné, quelle que soit sa distribution initiale.

D'après cette remarque, si l'on admet que la variable aléatoire reste indéfiniment observable, il faut ou bien qu'elle soit bornée a priori, ou bien que la loi de passage ne soit pas symétrique: il est nécessaire alors que la loi de passage présente une dissymétrie telle, que la diminution de la grandeur considérée devienne plus probable que son augmentation, dès qu'elle reçoit des valeurs suffisamment grandes. Ainsi il suffirait, pour que $P_n(x)$ tende vers une limite déterminée, que l'on ait

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(y, x)\, d\, x < a + \varrho\, y^2, \text{ où } \varrho < 1;$$

au contraire, si $\varrho \geq 1$ cette limite pourra ne pas exister.

Un exemple instructif à cet égard est fourni par la loi de passage

$$f(y, x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\varrho y)^2}{2\sigma^2}}$$

qui, pour $\varrho < 1$, conduit à la distribution limite

$$P(x) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{1-\varrho^2}{2\pi}}\, e^{-\frac{1-\varrho^2}{2\sigma^2}x^2},$$

tandis que pour $\varrho \geq 1$ on obtient une raréfication infinie.

En revenant au cas, où le domaine de la variable est borné nous devons nous arrêter spécialement sur l'application qu'on a faite de la théorie des chaînes de Markoff pour suppléer à l'hypothèse ergodique dans la théorie cinétique des gaz. L'état A d'une agglomération de molécules possédant une quantité donnée d'énergie, renfermées dans une enceinte, est représenté habituellement, comme on sait, par la position A d'un point assujetti à rester dans une partie déterminée de volume v_0 de l'espace à $6\,n$ dimensions, où n est le nombre de molécules. Admettons que la probabilité de passage p_{ik} d'un état A_i au moment t à l'état A_k au moment $t + \Delta t$ soit la même que celle du passage de A_k à A_i ($p_{ik} = p_{ki} > 0$), pourvu que l'intervalle de temps Δt ne soit pas trop petit. On peut alors affirmer, d'après ce qui précède, sans faire aucune hypothèse sur le mécanisme du phénomène que, quel que soit l'état initial, au bout d'un temps t assez grand par rapport à l'intervalle Δt, tous les états A_i tendent à devenir également probables, ou, ce qui revient au même, la probabilité de rencontrer le point représentatif A dans une région donnée de volume v tend vers le rapport des volumes $\frac{v}{v_0}$. De plus, en vertu de la loi des grands nombres qui est applicable aux chaînes de Markoff, si le système est abandonné à lui-même pendant un temps T_0 suffisamment grand, la probabilité du séjour du point A dans un volume v pendant une durée de temps $T = \frac{v}{v_0}\, T_0$ différera de 1 aussi peu qu'on veut.

Ce théorème ergodique, fondamental pour la théorie cinétique des gaz qui, comme on le voit, est une conséquence immédiate de l'interprétation stochastique, si plausible, donnée plus haut, n'a pu être déduit pendant longtemps de l'étude directe du système d'équations différentielles qui déterminent la trajectoire du point représentatif, et il était permis de douter de sa compatibilité avec l'ancienne représentation mécanique du mouvement des molécules. Ce n'est que récemment que M. Birkhoff est parvenu à démontrer un théorème équivalent en faisant des hypothèses d'une nature très générale sur les équations différentielles considérées.

Cette concordance remarquable semble prouver, d'une part, que les schémas causalistes ordinaires de la mécanique classique restent suffisants pour expliquer les lois macroscopiques de la théorie des gaz et, d'autre part, que les interprétations stochastique et déterministe d'un phénomène peuvent conduire à des conséquences limites équivalantes. Actuellement, la différence entre les deux interprétations consiste essentiellement en ce que la mécanique opère avec des intervalles de temps infiniment petits, tandis que l'emploi des chaînes de Markoff exclut la possibilité de faire tendre Δt vers 0; si ce passage à la limite était légitime, le régime stationnaire se trouverait réalisé momentanément.

Mais il y a lieu de noter une autre propriété fondamentale des chaînes non stationnaires qui les distingue des trajectoires dynamiques: c'est leur irréversibilité.

En effet, l'égalité $p_{ik} = p_{ki}$ exprime seulement que la probabilité d'aller de A_i à A_k est la même que celle d'aller de A_k à A_i au passage de l'état antérieur à l'état ultérieur; donc, si p'_{ik} désigne la probabilité que le point arrivé à A_k soit parti de A_i, on a les égalités

$$P_k^{(n+1)} p'_{ik} = P_i^{(n)} p_{ik}, \quad P_i^{(n+1)} p'_{ki} = P_k^{(n)} p_{ki}.$$

Par conséquent, tant que le régime stationnaire n'est pas établi, on n'aura pas, en général, $p'_{ik} = p'_{ki} = p_{ik}$, et, de plus, tandis que p_{ik} dans une chaîne est, par définition, fixé d'avance, indépendemment de l'état initial, les probabilités p'_{ik} sont, au contraire, a priori indéterminées. D'ailleurs, le fait que la différence entre les extrêma de $P_e^{(n+1)}$ est toujours plus petite que la différence correspondante des $P_e^{(n)}$ prouve assez clairement que dans une chaîne de Markoff la tendance vers la distribution uniforme des probabilités ne saurait avoir lieu dans les deux sens.

8⁰ Ainsi, tandis que les équations de la mécanique classique déterminent d'une façon analogue l'avenir et le passé, il n'en est pas de même pour les chaînes. Par conséquent, si l'on veut reconstituer cette symétrie entre le passé et le futur (ce dont, personnellement, je ne vois pas la nécessité) il faut renoncer à l'emploi des chaînes du type de Markoff et les remplacer par des schémas d'une nature différente. A cet effet, considérons une succession de grandeurs aléatoires x_i, telles que la loi des probabilités x_i ne soit déterminée, $f(x_{i-h}, x_{i+k}, x_i)$, que lorsqu'on connait une valeur antérieure x_{i-h} et une valeur postérieure x_{i+k}, de sorte que la connaissance supplémentaire des valeurs d'indice inférieur à $i-h$ ou supérieur à $i+k$ ne modifie pas la loi des probabilités de x_i. Dans ces conditions, si l'on se donne arbitrairement les valeurs initiale et finale de x_0 et x_n, par exemple, toutes les grandeurs intermédiaires x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ deviendront stochastiquement parfaites – nous dirons alors que ces grandeurs forment une chaîne réciproque. (Dans une chaîne ordinaire les grandeurs x_i deviennent stochastiquement parfaites dès que x_0 est donnée, de sorte que la loi de x_n ne peut plus alors être choisie arbitrairement.)

Supposons, pour traiter un cas précis assez général, qu'on a nécessairement $x_{i-h} \leq x_i \leq x_{i+k}$, et que la fonction f est de la forme

$$f = \frac{C_{h,k}}{x_{i+k} - x_{i-h}} f_{h,k}\left(\frac{x_i - x_{i-h}}{x_{i+k} - x_{i-h}}\right),$$

où $C_{h,k}$ est une constante qui se déterminera par la condition de normalité

$$C_{h,k} \int_0^1 f_{h,k}(z)\, d\, z = 1.$$

On démontre alors que la loi des probabilités doit être de la forme

$$f_{h,k}(z) = z^{\lambda h - 1}(1 - z)^{\lambda k - 1},$$

où λ est un paramètre positif arbitraire, et se réduit ainsi à une courbe de M. Pearson. On a évidemment

$$E\, x_i = \frac{k\, x_{i-h} + h\, x_{i+k}}{k+h}$$

et la dispersion

$$\sigma^2 x_i) = \frac{h\, k}{\lambda(h+k)+1}\left(\frac{x_{i+k} - x_{i-h}}{h+k}\right)^2.$$

Si λ est fixe et n très grand, les courbes de Pearson tendront vers des courbes normales avec des dispersions tendant vers 0, et pour $n = \infty$, les points x_i se disposeraient rigoureusement en ligne droites. Si λ tend vers 0 de telle sorte, que $\lambda\, n = a$ reste constant, la chaîne réciproque limite définira une variable aléatoire monotone quasi-continue, pour laquelle $f_{h,k}(z)$ se mettra sous la forme

$$f_{h,k}(z) = z^{a(t-t_0)-1}(1 - z)^{a(t_1-t)-1},$$

où on pose $\frac{i}{n} = t$, $\frac{i-h}{n} = t_0$, $\frac{i+k}{n} = t_1$; ce qui nous donne un schéma général du mécanisme stochastique de la formation et de la transformation continue des courbes de M. Pearson.

On doit à M. Schrödinger un procédé important de formation de chaînes réciproques qu'il a proposé dans son Mémoire „Über die Umkehrung der Naturgesetze".

Admettons que deux grandeurs x_0 et x_1 soient en corrélation imparfaite, telle que l'on sache seulement que la densité des probabilités de x_1 est $f(x_0, x_1)$, lorsque x_0 est donné. Pour fixer les idées, posons avec M. Schrödinger

$$f(x_0, x_1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t_1 - t_0)}} e^{-\frac{(x_1 - x_0)^2}{4D(t_1 - t_0)}}, \tag{8}$$

en rappelant seulement, comme nous l'avons vu, qu'il est, en tout cas, impossible que la probabilité de x_0, pour x_1 donné, soit représentée par la même fonction. La surface de corrélation la plus générale, correspondant à cette loi de passage sera

$$F(x_0, x_1) = P(x_0)\, f(x_0, x_1),$$

où $P(x_0)$ est la distribution des probabilités de x_0 qui peut être donnée arbitrairement; la loi de distribution de x_1 sera alors déterminée par la formule

$$P_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_0)\, f(x_0, x_1)\, d\, x_0 \tag{9}$$

Ainsi sans contradiction avec la loi de passage $f(x_0, x_1)$ on ne pourra pas, en effectuant un grand nombre d'observations, obtenir des fréquences $w_0(x_0)$ et $w_1(x_1)$ sensiblement éloignées de la relation (9). Mais rien n'empêche de collectionner avec assez de patience des paires de valeurs (x_0, x_1) très improbables et de tirer de la distribution primitive un tableau de corrélation arbitraire entièrement nouveau. Cependant, si ce n'est pas la coïncidence de (x_0, x_1) dans une même paire ou chez un même individu qui nous intéresse, mais seulement les fréquences $w_0(x_0)$ et $w_1(x_1)$ de x_0 et x_1 considérées isolément, une telle sélection sera relativement bien plus facile à réaliser, et on a un problème mathématique parfaitement déterminé, si l'on demande quel est le tableau de corrélation, correspondant aux fréquences choisies $w_0(x_0), w_1(x_1)$, le plus probable que l'on formera ainsi. En supposant que le nombre de paires collectionnées soit très grand, on trouve, d'après M. Schrödinger, que la nouvelle surface de corrélation aura pour limite

$$F(x_0, x_1) = f(x_0, x_1)\ \psi(x_0)\ \varphi(x_1)$$

où l'on a, pour déterminer $\psi(x_0)$ et $\varphi(x_1)$, les équations intégrales

$$\left.\begin{aligned} w_0(x_0) &= \psi(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, x_1)\ \varphi(x_1)\, d\, x_1 \\ w_1(x_1) &= \varphi(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0, x_1)\ \psi(x_0)\ d\, x_0. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

On peut démontrer que dans le cas, où $f(x_0, x_1)$ a la forme (8) considérée par M. Schrödinger, le système (10) admet une solution, quelles que soient les fonctions continues $w_0(x)$ et $w_1(x)$.

Cela étant, si x_0, x, x_1 formaient primitivement une chaîne simple déterminée par les lois de passage $f_0(x_0, x)$, $f_1(x, x_1)$, la loi des probabilités de x deviendra

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(x_0, x)\ \psi(x_0)\, d\, x_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x, x_1)\, \varphi(x_1)\, d\, x_1 = \Psi(x).\ \Phi(x), \tag{11}$$

et, puisqu'elle ne sera déterminée que, si $w_0(x_0)$ et $w_1(x_1)$ sont données toutes les deux, la chaîne primitive se trouvera transformée en une chaîne réciproque.

Dans le cas considéré par M. Schrödinger $f_0(x_0, x) = \dfrac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\pi D(t-t_0)}}}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}}$,

$$f_1(x, x_1) = \frac{e^{-\frac{(x_1-x)^2}{4\pi D(t_1-t)}}}{\sqrt{4\pi D(t_1-t)}},$$

de sorte que $\Psi(x)$ et $\Phi(x)$ satisfont respectivement aux équations conjuguées

$$D \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad D \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

et se réduisent respectivement à $\psi(x_0)$ pour $t = t_0$ et à $\varphi(x_1)$ pour $t = t_1$.

Si l'on assujetti les distributions initiales et finales $w_0(x_0)$ et $w_1(x_1)$ à certaines conditions supplémentaires qu'il faut introduire pour que les deux intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_0)\, d\, x_0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1)\, d\, x$, aient un sens [ainsi, par exemple, en supposant $w_0(x_0) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4h^2}}}{2h\sqrt{\pi}}$, $w_1(x_1) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4h_1^2}}}{2h_1\sqrt{\pi}}$, il faudrait que $|h_1^2 - h^2| < D(t_1 - t_0)$], la chaîne réciproque de M. Schrödinger est susceptible de l'interprétation simple suivante. Considérons deux variables aléatoires indépendantes x' et x'' que nous appellerons conjuguées, formant deux chaînes ordinaires de sens inverse, déterminées, respectivement, par les lois de passage $f_0(x_0, x)$, $f_1(x_1, x)$, et admettons que la grandeur x que nous observons ne soit définie que lorsqu'on a simultanément $x' = a$, $x'' = a$ et qu'elle reçoive alors la même valeur a. Dans ces conditions, il résulte immédiatement du théorème de la multiplication des probabilités, que $w_0(x_0)$ et $w_1(x_1)$ seront représentées à un facteur constant près par les intégrales (10), $\psi(x_0')$ et $\varphi(x_1'')$ étant les probabilités initiales des variables conjuguées x' et x'', et la probabilité cherchée $w(x)$ (au même facteur près) sera donnée par la formule (11).

Remarquons que les chaînes réciproques, quel que soit leur mode de formation, étant stochastiquement déterminées par les états initial et final, sont naturellement incapables de fournir des schémas stochastiques parfaits des états antérieurs à l'état initial et postérieurs à l'état final; ainsi, elles sont assimilables aux trajectoires dynamiques considérées au point de vue des principes variationnels, mais tandis qu'une trajectoire mécanique ainsi définie, peut, en général, être prolongée d'une façon déterminée dans les deux sens, les chaînes réciproques ne jouissent pas de cette propriété: pour leur validité universelle il serait donc nécessaire que le temps soit fini. Quoiqu'il en soit, la forme, sous laquelle nous avons présenté ici les chaînes réciproques qui est sensiblement différente de la conception de M. Schrödinger, est logiquement indépendante du temps, et par conséquent, peut également être appliquée, en particulier, à des problèmes statiques de nature stochastique analogue.

Je suis loin d'avoir épuisé l'étude générale des liaisons entre les quantités aléatoires; mais vous voyez par ce qui précède l'immense variété des moyens dont dispose la théorie des probabilités pour l'interprétation mathématique des phénomènes de la nature, et vous m'excuserez, je l'espère, si je n'ai pas réussi à vous exposer d'une façon suffisamment complète toutes les principales idées modernes relatives à ce domaine si vaste.

Neuere Methoden und Probleme der Geometrie

Von Karl Menger, Wien

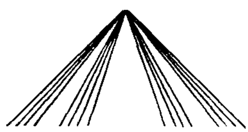
Als mir die Auszeichnung zuteil wurde, von diesem Kongresse zu einem Vortrag aus meinem Arbeitsgebiete aufgefordert zu werden, war es zunächst meine Absicht, über einige neuere Methoden und Probleme der Geometrie im allgemeinen zu sprechen, wobei ich, um auftragsgemäss mein Arbeitsgebiet darzustellen, vor allem die mengentheoretische Richtung der Geometrie ins Auge fasste. So viel sich nun jedoch über Methoden und Probleme der mengentheoretischen Geometrie in Dimensions- und Masstheorie, in Topologie und Metrik sagen liesse — und zwar nicht nur über diese Wissenszweige an sich, sondern insbesondere auch über ihre Verknüpfung mit Gegenständen der klassischen Geometrie, — *einen* Eindruck würde Ihnen ohne Beschränkung des so ausserordentlich umfassenden Gebietes ein solcher Vortrag in Anbetracht der Kürze der verfügbaren Zeit kaum vermitteln können, nämlich den der Abgeschlossenheit, die wir an den klassischen Theorien so schätzen. Mehrere einzelne Kapitel der mengentheoretischen Geometrie aber erfreuen sich bereits einer weitgehenden Abrundung. Ich habe deshalb in der letzten Zeit beschlossen, vorwiegend doch bloss ein einziges Kapitel der mengentheoretischen Geometrie darzustellen, zumal sich dabei ja mehrfach Gelegenheit ergeben wird, allgemeine methodische Fragen zu streifen. Meine Wahl fiel auf die *Kurventheorie*, da dieses neueste Kapitel der Raumlehre an systematischer Abgeschlossenheit wohl kaum einem anderen Teile der Geometrie nachsteht und dabei vielleicht auch dem Fernerstehenden einen bequemen Zugang zu den in Rede stehenden Gegenständen bietet.

Die älteren Versuche von Kurventheorien brauche ich wohl nur kurz zu erwähnen, denn sie sind allgemein bekannt. Drei von ihnen suchten sich auf den Abbildungsbegriff zu stützen. Man hielt die Kurvennatur für eine *quantitative* Eigenschaft, d. h. man meinte, Kurven enthielten weniger Punkte als Flächen und Körper und mehr als diskontinuierliche (verstreut liegende) Gebilde. Dies führte *erstens* auf die *eineindeutigen Abbildungen.* Eineindeutig abbildbar aber ist nach Georg Cantor die Strecke auch auf Quadrat und Würfel einerseits und auf verstreute Gebilde anderseits, so dass auf eineindeutige Abbildungen ein Kurvenbegriff nicht gegründet werden kann. Man hielt die Kurven mit Jordan für jene Gebilde, welche stetig durchlaufbar sind, d. h. als Weg eines sich stetig bewegenden Punktes dargestellt werden können. Dies führte *zweitens* auf die *stetigen Abbildungen.* Aber auch stetig ist die Strecke nach Peano auf die Quadratfläche abbildbar, so dass auch auf den

Begriff der stetigen Abbildungen ein brauchbarer Kurvenbegriff nicht gegründet werden kann, wenngleich nach Hahn und Mazurkiewicz die stetig durchlaufbaren Gebilde auch durch eine wichtige gestaltliche Eigenschaft gekennzeichnet werden können, die als *Zusammenhang im Kleinen* oder als lokaler Zusammenhang bezeichnet wird. Man untersuchte *drittens* jene Gebilde, die durch eine zugleich eineindeutige und stetige Abbildung oder, wie man auch sagt, durch eine *topologische Abbildung* aus einer Strecke erhalten werden können und kam so mit Lennes zu jenen Kontinua, die linear ordenbar sind, bzw. die zwei Punkte enthalten, so dass sie nach Tilgung jedes von ihnen verschiedenen Punktes zerfallen. Diese Gebilde pflegt man heute als *Bogen* zu bezeichnen. Obwohl Quadrat und Würfel nach einem Satz von Lüroth, der ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von Brouwer ist, nicht zu den Bogen gehören, kann man einen allgemeinen Kurvenbegriff auch auf topologische Abbildungen nicht stützen, denn schon die Kreislinie und die Lemniskate lassen sich ja nicht durch topologische Abbildung aus einer Strecke erzeugen, gehören also nicht zu den Bogen.

Ein *vierter* Versuch bestand in einer Kombination des Begriffes der topologischen Abbildungen mit einem *Zusammensetzungsverfahren.* Man nannte Bogenkomplex oder *gewöhnliche Kurve* ein Kontinuum, welches Summe von endlichvielen Bogen ist, die paarweise höchstens Endpunkte gemein haben. Unter den Begriff der gewöhnlichen Kurven fallen Kreis und Lemniskate offenbar, aber dennoch ist er für einen allgemeinen Kurvenbegriff viel zu eng, da ja z. B. das sogenannte Sinusoid

d. h. der Graph der Funktion $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leqq 1$ ergänzt durch die Strecke $-1 \leqq y \leqq 1$, $x = 0$ nicht zu den gewöhnlichen Kurven gehört. Und einfache Beispiele zeigen, dass es Gebilde gibt, die man als Kurven bezeichnet und die nicht einmal als Summe von *abzählbar* vielen Bogen darstellbar sind, z. B. jene Kurve, die entsteht, wenn man das Cantorsche Diskontinuum aus einem Punkt projiziert.



Liesse man dagegen Summen von *unabzählbar* vielen Bogen zu, so erhielte man einen viel zu weiten Kurvenbegriff, denn als Summe von unabzählbar vielen Strecken sind ja auch Quadrat und Würfel darstellbar.

Auch der Versuch Zorettis, die Kurven durch eine gestaltliche Eigenschaft zu charakterisieren, nämlich dadurch, dass sie zwar Kontinua sind, d. h. abgeschlossene, zusammenhängende Mengen (Mengen, die nicht in zwei getrennte Teilmengen spaltbar sind), dass sie aber sogenannte zwischen zwei Punkten *irreduzible Kontinua* sind (d. h. Kontinua, die keine die beiden Punkte enthaltende echte Teilkontinua besitzen), führte nicht zum Ziel, da nach Janiszewski irreduzible Kontinua existieren, die Quadratflächen als Teil enthalten.

Ein letzter Versuch, in der Ebene die Kurven als *die nirgends dichten Kontinua* zu erklären, oder, was auf dasselbe hinausläuft, als die Kontinua, die keine Quadratfläche enthalten, lieferte einen anschaulichen und brauchbaren Kurvenbegriff, der aber wesentlich auf die Ebene beschränkt ist, da schon im dreidimensionalen Raum auch die Flächen nirgends dichte Kontinua sind.

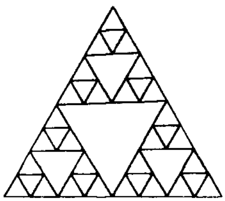
Die definitive Lösung des Problems durch die moderne Kurventheorie erfolgt auf ganz anderem Wege. Ich will, um die folgenden Ausführungen nicht fortwährend unterbrechen zu müssen, an dieser Stelle eine Zusammenstellung jener Autoren geben, die am Aufbau der Kurventheorie teilgenommen haben, und gerade vor einem internationalen Kongresse erscheint mir diese Art der Darstellung am Platze, da durch sie besonders in Evidenz gesetzt wird, wie die Kurventheorie ihre rasche Entwicklung in den verflossenen Jahren *internationaler wissenschaftlicher Kooperation* verdankt. Für alle Details sei auf das Buch „Kurventheorie" verwiesen, das der Vortragende unter Mitarbeit von Nöbeling herausgegeben hat und das im Oktober 1932 erscheint.

Mitberücksichtigt sind dort vor allem die Resultate der grossen Arbeit Urysohns über den Gegenstand. Die weitere Entwicklung gruppiert sich um einige Zentren: Von Mitarbeitern in *Polen* sind vor allem Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, Sierpiński, Zarankiewicz zu nennen. In Amerika beschäftigt sich eine Gruppe von Forschern vorwiegend mit der Untersuchung von Kontinua, wobei einige Ergebnisse auch kurventheoretische Bedeutung haben. Es sind vor allem zu nennen Ayres, Gehmann, Kline, R. L Moore, der Gründer der Schule, Wilder und G. T. Whyburn, von denen besonders der letztgenannte überaus scharfsinnige Beiträge zur Kurventheorie geliefert hat. In *Russland* hat Alexandroff einige kurventheoretische Sätze mit Methoden bewiesen, die er als kombinatorisch bezeichnet. Endlich sind die letzten Endes auf Anregung meines Lehrers Hahn zurückgehenden Beiträge aus *Wien* zu nennen, von denen ich vor allem die wichtigen Resultate von Nöbeling und Reschovsky erwähne, wozu noch einige weitere Ergebnisse meines Wiener mathematischen Kolloquiums treten.

Um die Kurven unter den Kontinua zu kennzeichnen, vergleicht man eine Kurve mit einer Fläche und einem Körper. Denken Sie um einen Punkt eines *Körpers* eine kleine Umgebung (etwa eine Kugel, ein Ellipsoid oder dgl.) gelegt, so sehen Sie, dass die Begrenzung (die Oberfläche) der Umgebung vom Körper in ganzen *Flächenstücken* durchdrungen wird. Legen wir um einen Punkt einer *Fläche* eine kleine Umgebung, so wird ihre Begrenzung von der Fläche in *Linienstücken* durchschnitten. Um einen Punkt einer *Kurve* können wir beliebig kleine Umgebungen legen, deren Begrenzungen von der Kurve in *verstreut liegenden Punkten* durchstochen werden. So erhalten wir die folgende Definition: *Ein Kontinuum K heisst Kurve, wenn jeder Punkt von K in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K nur verstreut liegende Punkte, d. h. kein Kontinuum gemein haben.* Z. B. ist der Kreis eine Kurve, denn jeder Punkt des Kreises ist in beliebig kleinen Kugeln enthalten, deren Begrenzungen von der Kreislinie in genau zwei Punkten durchstochen werden. Ebenso ist das erwähnte Sinusoid eine Kurve und allgemein kann man zeigen, dass in der Ebene die Kurven mit den nirgends dichten (d.h. mit den keine Quadratfläche enthaltenden) Kontinua identisch sind. Aber die allgemeine Kurvendefinition ist nicht auf die Ebene beschränkt, sondern auf Kurven in beliebigen euklidischen, ja noch in viel allgemeineren Räumen anwendbar.

Dasselbe Definitionsprinzip, das zum Kurvenbegriff führt — es ist insbesondere infolge seines lokalen Charakters eines der fruchtbarsten der mengentheoretischen Geometrie —, gestattet nun eine ausserordentlich feine Beschreibung der einzelnen Kurvenpunkte. Jeder Punkt eines Kreises ist in beliebig kleinen Umgebungen enthalten, deren Begrenzungen vom Kreise in genau zwei Punkten durchstochen werden, während um einen Kreispunkt nicht beliebig kleine Umgebungen gelegt werden können, deren Begrenzungen mit dem Kreis bloss einen Punkt gemein haben. Wir nennen daher die Kreispunkte Punkte zweiter Ordnung und in demselben Sinne den Durchsetzungspunkt einer Lemniskate einen Punkt vierter Ordnung. Allgemein heisst ein Punkt der Kurve K *von n-ter Ordnung*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen liegt, deren Begrenzungen n Punkte mit K gemein haben, während p nicht in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K weniger als n Punkte gemein haben. Ein Punkt von K heisst *regulär*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K *endliche* Durchschnitte gemein haben; er heisst *rational*, wenn er in beliebig kleinen Umgebungen enthalten ist, deren Begrenzungen mit K *abzählbare* Durchschnitte haben. Die Punkte der Teilstrecke des Sinusoides sind rational, aber nicht regulär. Kurven, die nur reguläre Punkte enthalten, heissen *reguläre Kurven;* Kurven, die nur rationale Punkte enthalten, werden *rationale Kurven* genannt. Ein Beispiel einer irrationalen Kurve liefert z. B. die zweite Figur.

Das nächstliegende Problem über die Struktur der Kurven besteht nun in der Frage nach der Verteilung der Punkte verschiedener Ordnung in einer gegebenen Kurve. Für jede Kurve K ist die Menge $\overset{1}{K}$ aller Punkte erster Ordnung (aller Endpunkte) diskontinuierlich, obwohl die Endpunkte, nebenbei bemerkt, in der Kurve dicht liegen können. Auch für jede natürliche Zahl $n > 2$ ist die Menge $\overset{n}{K}$ aller Punkte n-ter Ordnung von K diskontinuierlich. Die Zahl 2 ist also ausgezeichnet, denn aus Punkten zweiter Ordnung können offenbar Teilkontinua einer Kurve bestehen. Man meint auf den ersten Blick, diese Rolle der Zahl 2 sei selbstverständlich. Denn wenn man eine gewöhnliche Kurve betrachtet, so sieht man, dass fast alle ihre Punkte von der Ordnung 2 sind und nur endlich viele End- und Verzweigungspunkte in ihr auftreten. Indessen ist im allgemeinen die Sachlage eine völlig andere. Die Zahl 2 ist allerdings in beliebigen Kurven ausgezeichnet, aber gleichsam nur potentiell. 2 ist die einzige Zahl, die als Ordnung aller Punkte eines Teilkontinuums einer Kurve auftreten *kann*, aber es gibt Kurven, die überhaupt keine Punkte der Ordnung 2 enthalten. Das einfachste Beispiel einer solchen Kurve, deren sämtliche Punkte Verzweigungspunkte sind, ist folgende *Dreieckskurve*, welche entsteht, indem man ein Dreieck in vier kongruente Dreiecke teilt, das Innere des mittleren Teildreieckes tilgt, dieselbe Konstruktion in jedem der drei verbleibenden Teildreiecke durchführt und so ad infinitum fortfährt.



Damit ist zugleich Anlass zu einer methodischen Bemerkung gegeben. Wir haben hier eine jener weit bekannten und auch oft geschmähten *mengentheoretischen Singularitäten* vor uns, die nach Auffassung mancher nicht mengentheoretisch orientierter Geometer den Hauptgegenstand der mengentheoretischen Geometrie bilden. In der Tat findet es der Mengentheoretiker interessant, dass er ein Beispiel einer Kurve erbringen kann, die nur Verzweigungspunkte besitzt. Aber beachten Sie, dass abgesehen davon diese Beispiele von Singularitäten in einer ganz anderen Hinsicht von Wichtigkeit sind! Wenn Sie sich nämlich vor Augen halten, dass Kurven existieren, die nur Punkte einer Ordnung $\neq 2$ enthalten, so wird Ihnen der Satz, dass für jedes natürliche n die Menge $\overset{n}{K}$ aller Punkte n-ter Ordnung einer Kurve K diskontinuierlich ist, wohl in einem anderen Licht erscheinen. *Die Singularität bildet also einen Hintergrund, vor dem die Merkwürdigkeit allgemeiner Regelmässigkeiten erst ins rechte Licht tritt,* wie denn überhaupt mengentheoretische Singularitäten durchaus nicht nur um ihrer selbst willen von Interesse sind, sondern vor allem deshalb, weil sie erkennen lassen, *wie unermesslich umfassend und merkwürdig* *der Bereich von Gegenständen ist, in dem die mengentheoretische Geometrie Ordnung schafft und allgemein giltige Gesetze formuliert.*

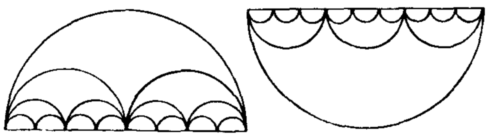
Im obigen Falle kann man übrigens viel weiter gehen. Es gibt geradezu zahlentheoretische Funktionen, welche festlegen, welche Ordnungen miteinander kombiniert auftreten können und welche nicht. Kurven, welche nur Punkte der Ordnungen 4 und 5 enthalten, können nicht existieren, während die Ordnungen n und $2n—2$ kompatibel sind und die Funktion $2n—2$ in gewissem Sinne eine Kompatibilitätsgrenze angibt.

Wieder eine methodische Bemerkung: Ich weiss nicht, wie man diese hinsichtlich beliebiger Mengen giltigen Sätze selbst für manche jener Gebilde, welche auch nicht-mengentheoretischer Definitionen fähig sind, mit anderen als mengentheoretischen Mitteln beweisen könnte. Allerdings wird man von gewissen sogenannten kombinatorischen Standpunkten aus vielleicht einwenden, dass die Mengen $\overset{n}{K}$ im allgemeinen nicht abgeschlossen sind und daher gar nicht innerhalb des Kreises der auf diesen Standpunkten betrachteten Objekte liegen. Aber ich kann nicht sehen, welchen Vorteil es für eine Theorie hat, giltige Sätze nicht formulieren zu können, noch dazu in sehr vielen Fällen Sätze, die auch für Gebilde gelten, die in der Theorie betrachtet werden. Wir werden also so unerwartete einfache allgemeine Sätze natürlich keineswegs fallen lassen. *Durch Ausschaltung angeblich pathologischer Gegenstände verzichtet man auf sicher gesunde Gesetze.* Es wäre, als wollte man aus der Zahlentheorie die transzendenten Methoden verbannen. Dabei ist zu bedenken, dass wir ja dank den grundlegenden Entdeckungen von Herrn Gödel in Wien wissen, dass sicher arithmetische Sätze existieren, die nur mit transzendenten Methoden beweisbar sind, und ebenso, *dass sicher Sätze über kombinatorisch eingeführte Gebilde existieren, die nur mit mengentheoretischen Methoden bewiesen werden können.*

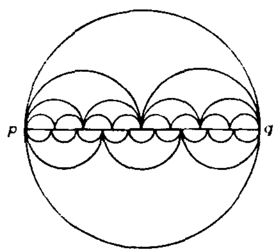
Das Problem der Verteilung der Punkte verschiedener Ordnung in einer Kurve ist nach allen Richtungen durchforscht und restlos gelöst. Lassen Sie mich aus der Fülle weiterer Sätze über die Struktur der Kurven nur erwähnen, dass die irregulären und auch die irrationalen Punkte einer Kurve nie isoliert auftreten können, sondern, so wie man im Beispiel des Sinusoides verifizieren kann, stets in kontinuierlichen Ballungen; ferner, dass die Menge aller irrationalen Punkte einer Kurve selbst in keinem ihrer Punkte regulär, dagegen in jedem ihrer Punkte rational sein kann.

Um in der Systematik der Kurventheorie fortzufahren, wende ich mich den *Zerlegungsproblemen* zu. Jede Kurve, wie allgemein und wie absonderlich sie auch sein mag, teilt mit den gewöhnlichen Kurven doch jedenfalls die Eigenschaft, dass sie in endlichviele beliebig kleine abgeschlossene Mengen zerlegt werden kann, die zu je zwei einen diskontinuierlichen Durchschnitt besitzen und die zu je drei überhaupt keine Punkte gemein haben. Und diese Eigenschaft ist für die Kurven unter den Kontinua (den Kontinua im allgemeinsten Sinne des Wortes) charakteristisch. Wenn Sie ein Kontinuum, das keine Kurve ist, also ein mehrdimensionales Kontinuum, in hinreichend kleine abgeschlossene Mengen zerlegen, treten immer Summandenpaare auf, die ganze Kontinua mit einander gemein haben und Summandentripel, die Punkte gemein haben, so wie bei einer Zerlegung der Erdoberfläche in kleine Gebiete kontinuierliche Grenzen und Dreiländerecken vorkommen. Ich erwähne noch, dass aus dieser Gemeinsamkeit beliebiger Kurven mit gewöhnlichen Kurven auch folgt, dass man jede Kurve in eine gewöhnliche Kurve durch beliebig kleine Verrückungen der Punkte stetig deformieren kann, und dass auch diese Eigenschaft für die Kurven unter den allgemeinen Kontinua charakteristisch ist.

Ein anderer Fragenkreis beschäftigt sich mit der *Summe von Kurven*. Vereinigt man zwei Kurven, so entsteht, wenn die Summe ein Kontinuum ist, wieder eine Kurve. Ja, es ist selbst die Summe von abzählbarvielen Kurven niemals eine Fläche. Ebenso ist die Summe von abzählbarvielen rationalen Kurven eine rationale Kurve. Die Summe von abzählbarvielen regulären Kurven ist natürlich, wie man am Beispiel des Sinusoides leicht erkennt, nicht notwendig regulär. Was aber ist näherliegend als die Vermutung, dass wenigstens die Summe endlichvieler regulärer Kurven regulär ist? Und doch ist dem nicht so. Schon die Summe zweier regulärer Kurven kann irregulär sein. Sie werden nun wieder ein recht absonderliches Gegenbeispiel für dieses merkwürdige Vorkommnis erwarten. Hier ist eines: Fügt man die beiden folgenden Kurven,



wobei man die Konstruktion der Halbkreise natürlich ad infinitum fortgesetzt zu denken hat und von denen man leicht zeigen kann, dass sie regulär sind, zusammen, so ist die entstehende Kurve



irregulär. Ich halte es für sehr wohl denkbar, dass man Wertkriterien formulieren könnte, denen zufolge auch diese Kontinua „geometrisch nicht vollwertig" sind. Tatsache aber ist, dass es sich um Figuren handelt, die im Kapitel über Modulfunktionen die geometrische Zierde der klassischen Bücher über Funktionentheorie bilden.

Aber die zuletzt betrachtete Summenkurve hat noch andere merkwürdige Eigenschaften, — Eigenschaften von jener Art, wie sie bisweilen als „bloss mengentheoretische Vorkommnisse" etwas geringschätzig behandelt werden. Man würde doch z. B. kaum für möglich halten, dass ein Kontinuum K zwei Punkte p und q enthält, die für jede noch so grosse natürliche Zahl n innerhalb des Kontinuums K durch n bis auf die Punkte p und q paarweise fremde Bogen verbindbar sind, ohne dass p und q innerhalb von K durch unendlichviele paarweise fremde Bogen verbindbar sind. Und doch. Die letztbetrachtete Summenkurve, die man mit Rücksicht auf ihre Definierbarkeit durch automorphe Funktionen wohl nicht als allzu pathologisch bezeichnen kann, besitzt diese Eigenschaft hinsichtlich der eingezeichneten Punkte p und q. Wieder ergibt sich eine methodische Bemerkung, gleichsam dual zur vorigen: *Durch Ausschaltung angeblich pathologischer Vorkommnisse verzichtet man auf sicher gesunde Gegenstände.*

Unter den vielen merkwürdigen Eigenschaften dieser schönen Kurve habe ich darum gerade die erwähnte herausgegriffen, weil sie zu einer wichtigen Fragestellung überleitet, die wiederum durch ein allgemeines, noch dazu auf ganze Zahlen bezügliches Gesetz beantwortet wird. Jeder Punkt p von n-ter Ordnung eines beliebigen stetig durchlaufbaren Kontinuums K ist Scheitel eines in diesem Kontinuum enthaltenen n-Beines, d. h. es lassen sich aus dem Kontinuum n im Punkt p endende, sonst paarweise fremde Bogen herausgreifen, während ein $(n + 1)$-Bein mit dem Scheitel p im Kontinuum K nicht enthalten ist. Beachten Sie, dass diese n Bogen durchaus nicht die gesamte Nachbarschaft von p im Kontinuum auszufüllen brauchen. Das Kontinuum kann z. B., wie wir sahen, bloss aus Verzweigungspunkten bestehen. Und doch lässt sich aus dem wenn auch noch so verwickelten Liniengewirre zu jedem Punkt n-ter Ordnung stets ein n-Bein, aber kein $(n + 1)$-Bein herausgreifen.

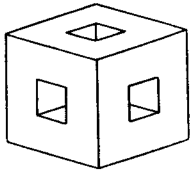
Was die Kurventheorie weiter leistet, ist eine systematische Untersuchung der hauptsächlichen Kurvenklassen, der rationalen Kurven, der regulären Kurven, spezieller Klassen regulärer Kurven und so weiter bis zu den gewöhnlichen Kurven, für die als charakteristisch erwiesen wird, dass sie nur endlichviele Punkte enthalten, deren Ordnung $\neq 2$ ist. Es ist *ein systematischer Weg vom Allgemeinen zum Speziellen* mit Kennzeichnung jeder spezielleren Klasse innerhalb der allgemeineren. Und dies ist eine ganz allgemeine Methode der mengentheoretischen Geometrie. Sie *untersucht* auch die einfachen Gebilde, aber sie *geht nicht von ihnen aus.* Sie lässt sich durch keine von vornherein angenommene Beschränkung den Weg zum Allgemeinen versperren, *sondern sie kennzeichnet das Spezielle unter dem Allgemeinen.*

Zwei Beispiele mögen dies erläutern.

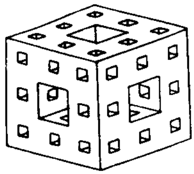
Wir haben erwähnt, dass es Kurven gibt, die nicht stetig durchlaufbar sind (wie z. B. das Sinusoid) und dass es stetig durchlaufbare Kontinua gibt, die keine Kurven sind (wie z. B. die Quadratfläche). Untersucht man jedoch jene Kontinua, die nicht nur selbst stetig durchlaufbar sind, sondern deren sämtliche Teilkontinua stetig durchlaufbar sind, so zeigt sich, dass diese „*erblich durchlaufbaren*“ Kontinua durchwegs Kurven sind. Ja, man kann weiter zeigen, dass diese Klasse der erblich durchlaufbaren Kontinua sich zwischen die Klasse der regulären und die Klasse der rationalen Kurven einschiebt, in dem Sinne, dass jede reguläre Kurve erblich durchlaufbar und jede erblich durchlaufbare rational ist, während rationale Kurven existieren, die nicht erblich durchlaufbar sind, wie z. B. das Sinusoid, und erblich durchlaufbare Kurven, welche nicht regulär sind. Für das letztere Vorkommnisl iefert übrigens ein Beispiel wiederum die vorhin erwähnte und abgebildete irreguläre Kurve, welche als Summe zweier mit Hilfe der Modulfunktionen definierbarer regulärer Kurven darstellbar ist. Gekennzeichnet sind die erblich durchlaufbaren Kurven u. a. durch die Eigenschaft, dass sie kein *Konvergenzkontinuum* als Teil enthalten, d. h. kein Teilkontinuum T enthalten, zu dem eine Folge von paarweise und zu T fremden, gegen T konvergenten Teilkontinua der Kurve existiert.

Das zweite Beispiel knüpft an die Bemerkung, dass die Summe zweier regulärer Kurven nicht regulär sein muss. Diese Tatsache legt die Betrachtung von *beständig regulären* Kurven nahe, d. h. von Kurven, die nicht nur regulär sind, sondern nach Hinzufügung einer beliebigen regulären Kurve regulär bleiben. Die Klasse dieser beständig regulären Kurven schiebt sich zwischen die Klasse der regulären Kurven und die Klasse der eingangs erwähnten gewöhnlichen Kurven (oder Bogenkomplexe) ein. Gekennzeichnet sind die beständig regulären Kurven durch die Eigenschaft, dass sie kein *Häufungskontinuum* enthalten, d. h. kein Teilkontinuum besitzen, dessen Komplement in der Kurve dicht ist. Charakteristisch ist für sie ferner, dass sie kein Teilkontinuum enthalten, in welchem die Verzweigungspunkte der Kurve dicht liegen.

Mangel an Zeit verbietet mir, auch nur hinsichtlich der Kurventheorie auf die Fülle weiterer Resultate einzugehen, die aus dem Prinzip systematischen und kennzeichnenden Schreitens vom Allgemeinen zum Speziellen fliessen. Ich will hier vielmehr lediglich ein die Kurventheorie in gewissem Sinne abschliessendes Resultat erwähnen. Jede Kurve, sie mag noch so verwickelt sein und in einem noch so hochdimensionalen euklidischen Raum oder gar im Hilbertschen Raume liegen, kann topologisch auf eine Kurve des dreidimensionalen euklidischen Raumes abgebildet werden. Ja es existiert sogar eine bestimmte Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, die zu jeder noch so komplizierten Kurve eine in sie topologisch transformierbare Teilkurve enthält. Diese umfassende Kurve, die übrigens noch dazu stetig durchlaufbar ist, erhält man so: Man teilt einen Würfel in 27 kongruente Teilwürfel und tilgt den innersten und seine 6 Nachbarwürfel.



Man wiederholt sodann dieses Tilgungsverfahren in jedem der 20 verbleibenden Würfel



und iteriert diesen Prozess, der offenbar eine Verallgemeinerung der Konstruktion des Cantorschen Diskontinuums ist, ad infinitum. Die Menge aller verbleibenden Punkte ist die erwähnte Universalkurve.

Aber noch viel mehr! Die Tendenz, den Raumbegriff zu verallgemeinern, so dass der Raum nicht spezieller ist als die in ihm betrachteten Gebilde, — diese Tendenz, welche sich in der Differentialgeometrie so massgebend ausgewirkt hat, hat auch in der mengentheoretischen Geometrie Früchte getragen. In der Differentialgeometrie fand man, dass der euklidische Raum spezieller ist als die in ihm betrachteten Mannigfaltigkeiten, und ging deshalb zur Untersuchung der Mannigfaltigkeiten in Riemannschen Räumen über. In der mengentheoretischen Geometrie erweist sich der euklidische Raum noch in viel höherem Masse spezieller als die in ihm betrachteten Teilmengen, und zwar sowohl im Grossen als auch im Kleinen, sowohl in topologischer als auch in metrischer Hinsicht. Die betrachteten Teilmengen sind ja, um nur ein auf der Hand liegendes Beispiel zu erwähnen, durchaus nicht notwendig homogen, während der euklidische Raum homogen ist. Die erforderlichen Abstraktionen verdankt man Fréchet, der damit zu jenen allgemeinen Raumklassen der mengentheoretischen Geometrie gelangte, von denen seine Limesklassen, seine metrischen und seine halbmetrischen Räume (classes L, V, E), sowie Hausdorff's topologische Räume heute bereits ziemlich allgemein bekannt sind. Auch bezüglich dieser allgemeinen Räume lassen sich methodische Betrachtungen an-stellen, ähnlich jenen über die in der mengentheoretischen Geometrie betrachteten Gebilde. Auch unter diesen Räumen nämlich existieren ausserordentlich merkwürdige Individuen, und zwar merkwürdig sowohl in bezug auf die Natur ihrer Elemente, welche z. B. ihrerseits Teilmengen anderer Räume oder Abbildungen sein können, als auch hinsichtlich der zwischen den Elementen bestehenden Relationen und der gestaltlichen Eigenschaften. Und doch wird auch dieser unermessliche Bereich von Räumen durch allgemeine Gesetze beherrscht. Was die Kurventheorie betrifft, deren sämtliche Begriffe und Theoreme übrigens auf diese allgemeinen Räume übertragbar sind, so kann man zeigen, dass sogar jede Teilkurve eines dieser allgemeinen Räume topologisch auf eine Teilkurve der erwähnten Universalkurve abgebildet werden kann, was übrigens nur ein Spezialfall eines allgemeinen dimensionstheoretischen Einbettungssatzes ist.

Damit möchte ich, was die systematische Kurventheorie betrifft, meine wenigen Beispiele beschliessen. Diese gesamte Kurventheorie ist nur ein einziges und zwar ein einführendes Kapitel der mengentheoretischen Geometrie. Vor allem ist sie in gewissem Sinne bloss der einfachste Spezialfall der allgemeinen mengentheoretischen *Dimensionstheorie*, welche sich auf jenen Dimensionsbegriff stützt, der im Keime bereits in den berühmten Anfangsworten Euklids enthalten ist: „Das Äusserste einer Kurve sind Punkte, das Äusserste einer Fläche sind Kurven, das Äusserste eines Körpers sind Flächen“, — der sodann von Poincaré vorbereitet wurde, dem Brouwer und in den untersten Fällen Sierpiński bereits ausserordentlich nahegekommen waren, ohne dass diese Autoren allerdings ihre Definitionen zum Ausgangspunkt irgendeiner Theorie machten, und der schliesslich bei Urysohn und in meinen eigenen Abhandlungen definitiv formuliert und zum Ausgangspunkt einer umfassenden Theorie gemacht worden ist, welche in meinem Buche „Dimensionstheorie“ (1928) dargestellt ist.

In welchem Verhältnis stehen nun diese allgemeinen punktmengentheoretischen Untersuchungen zur *Topologie?* Mit Vergnügen hörte ich im gestrigen Vortrage Herrn Alexander's, die Untersuchungen von Punktmengen seien eigentlich gar nicht Topologie in dem auf Leibniz zurückgehenden Sinne der kombinatorischen Topologie, welche die qualitativen Eigenschaften im Grossen des Raumes und der Raumgebilde untersucht. Diese Auffassung vertrete ich nämlich in meinen Publikationen bereits seit mehreren Jahren. Ich möchte nur vorweg bemerken, dass von den mengentheoretisch orientierten Geometern mit dieser Auffassung nicht im geringsten irgendein Vorwurf gegenüber den von ihnen sehr geschätzten *kombinatorischen* Methoden verbunden wird, gegen die eine Polemik mir völlig fern liegt. Gelegentlich werden ja kombinatorische Methoden sogar in rein mengentheoretischer Geometrie verwendet, in der Kurventheorie z. B. zum Beweise des n-Beinsatzes. Fern liegt mir auch eine Polemik gegen die mit Approximationen und ε-Deformationen arbeitenden *sogenannten* kombinatoirschen Methoden[1]). Den zahlreichen Problemen, die bisher ausschliesslich mengentheoretischen und nicht pseudokombinatorischen Methoden sich zugänglich erwiesen haben (und zwar sowohl was Formulierung als auch was Beweise betrifft), stehen ja einige Fälle gegenüber, die bisher nur grenzkombinatorisch und noch nicht mengentheoretisch in Angriff genommen worden sind, wenngleich ich nicht verschweigen kann, dass in den meisten jener Fälle, die heute sowohl in sogenannter kombinatorischer als auch in mengentheoretischer Behandlung vorliegen, wie z. B. im Falle des Zusammenhangsbegriffes die mengentheoretische Behandlung mir kürzer, eleganter und allgemeiner erscheint.

Und nun möchte ich die Herrn Alexander und mir gemeinsame Ansicht, dass die mengentheoretische Geometrie keine Topologie sei, ergänzen durch eine Bemerkung, was die mengentheoretische Richtung in der Geometrie denn meines Erachtens ist: Ihr Ziel ist *die Untersuchung beliebiger Raumgebilde.* Manche geometrische Eigenschaften erweisen sich dabei als invariant gegenüber topologischen Transformationen, manche nicht, ohne dass doch deshalb diese letzteren darum weniger wichtig sein müssen. Als Beispiel einer für beliebige metrische Räume und ihre Teilmengen definierbaren, topologisch nicht invarianten und doch recht fruchtbaren Eigenschaft erwähne ich hier nur die *Konvexität.* Liegt ein metrischer Raum vor, d. h. eine Menge von (als Punkte bezeichneten) Elementen, in der je zwei Punkten p und q eine (als Abstand von p und q bezeichnete) Zahl $p\,q = q\,p$ zugeordnet ist, die > 0 ist, falls p und q verschieden sind, während von sich selbst jeder Punkt den Abstand 0 hat, und wobei je drei Punkte p, q, r der Dreiecksungleichung $p\,q + q\,r \geqq p\,r$ genügen, — dann sagen wir, q liege *zwischen* p und r, falls q von p und r verschieden ist und die Beziehung $p\,q + q\,r = p\,r$ besteht. Und wir nennen den metrischen Raum konvex, falls zu je zwei Punkten ein Punkt zwischen ihnen existiert. Es scheint mir nun sehr bemerkenswert, dass auch in der völlig untopologischen Konvexitätstheorie beim Studium der Verteilung gewisser metrisch-singulärer Punkte ganz dieselben Methoden anwendbar sind und ganz analoge Sätze gelten wie in der mengentheoretischen Kurventheorie. Die Spitzen eines metrischen Raumes beispielsweise (d. h. jene Punkte, welche zwischen keinen zwei Punkten des Raumes liegen) genügen ganz denselben früher erwähnten Verteilungsgesetzen wie die Endpunkte einer Kurve.

Und damit komme ich zu einem besonders wichtigen, bisher noch kaum in An-

[1]) Gesprächsweise schlug Herr Alexandroff nach dem obigen Vortrage vor, dem in demselben hervorgehobenen Unterschiede zwischen den kombinatorischen (mit endlichen Mengen operierenden) und den bisher häufig gleichfalls kombinatorisch genannten, obwohl mit dem Limesbegriff, ja mit kontinuierlichen Deformationen arbeitenden Methoden dadurch Rechnung zu tragen, dass man die lezteren als *grenzkombinatorisch* bezeichnet. Für eine eingehende Behandlung aller einschlägigen methodischen Fragen verweise ich auf meinen 1933 erscheinenden Einleitungsband der Sammlung „Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen.“

griff genommenen Fragenkomplex: *nach den topologischen Eigenschaften eines allgemeinen Raumes, welche die Aufprägung spezieller Metriken gewährleisten*, und anderseits *nach den metrischen Eigenschaften, welche das Äquivalent gewisser topologischer Eigenschaften sind.* Welche topologische Eigenschaft eines kompakten Raumes gewährleistet z. B. die Einführbarkeit einer Metrik, derzufolge der Raum konvex ist, bezw. derzufolge je zwei Punkte durch eine einzige geodätische Linie verbunden sind oder gar (in bloss vollständigen Räumen) genau eine Gerade bestimmen? Ist stetige Durchlaufbarkeit für die Konvexifizierbarkeit eines Raumes nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend? Und in welchen Beziehungen steht Unizität der geodätischen Linien zu den Bettischen- und Torsionszahlen? Dieser ganze Fragenkreis stellt letzten Endes den tiefsten Kern dessen dar, was man als *topologische Fragen der Differentialgeometrie* und als *Differentialgeometrie im Grossen* bezeichnet.

Überhaupt scheint mir nichts ungerechter, als wenn man der mengentheoretischen Geometrie vorwirft, sie habe keinen Anschluss an die klassischen Probleme der Geometrie oder sei im Begriffe, denselben zu verlieren. Wenn die Kurventheorie, von der ich Ihnen wegen ihrer Abrundung einige Beispiele vorgelegt habe, weniger Beziehungen zur älteren Geometrie besitzt, so weisen andere Zweige der mengentheoretischen Geometrie solche Beziehungen in eminentem Masse auf. Es ist überflüssig zu erwähnen, wie tief die mengentheoretischen *Masstheorien* der Pariser Schule in die gesamte Analysis eingegriffen haben. Es möge nur daran erinnert werden, wie speziell Methoden der *metrischen mengentheoretischen Geometrie* in Differentialgeometrie, Variationsrechnung, ja in Gruppentheorie langsam aber sicher einzudringen beginnen. Der Einfluss der mengentheoretischen Methoden auf diese klassischen Gebiete ist teils ein *verallgemeinernder*, teils ein *präzisierender*, teils ein *abrundender*. An manchen Stellen werden überflüssige Beschränkungen durch den Übergang zum Studium allgemeiner Mengen abgestreift, an manchen Stellen auch für die bisher bekannten Gebilde durch Heranziehung allgemeinerer Gebilde neue Sätze entdeckt. Als Beispiel erwähne ich nur eine Krümmungsdefinition unabhängig von direkten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für Bogen, welche nicht einmal durch Funktionen gegeben sein müssen, und eine Kennzeichnung der Strecke durch Krümmung O unter diesen Bogen, – also ein differentialgeometrischer Satz ohne Differentialrechnung. Erwähnt werden möge noch, dass die Kennzeichnung der euklidischen Räume unter den allgemeinen metrischen Räumen nicht nur zur Verwendung algebraischer Methoden geführt hat, sondern auch einige elementargeometrische und algebraische Sätze zutage gefördert hat.

Das aber, was mir von grundlegender Wichtigkeit an der mengentheoretischen Geometrie zu sein scheint, und was ich Ihnen zuvor durch einige kurventheoretische Bemerkungen näher zu bringen suchte, das ist *die unermessliche Erweiterung des*

Gegenstandes geometrischer Forschung, welche die unvergängliche Leistung Georg Cantor's mit sich gebracht hat, diesen Bereich, in dem sie die unglaublichsten Singularitäten entdeckt hat und von dem sie doch nachweist, dass er durch allgemeine Gesetze beherrscht wird. Wenn wir in der Geschichte der Geometrie zurückblicken, so gibt es höchstens einen einzigen Moment, der eine ähnliche Erweiterung des Forschungsbereiches zu verzeichnen hatte, nämlich die Entdeckung der analytischen Geometrie. Vor ihrer Entdeckung hatte man sich mit Geraden, Kegelschnitten und einigen wenigen algebraischen und transzendenten Kurven befasst, die zur Lösung eher zufälliger Probleme, wie Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung, dienten. Nach ihrer Entdeckung lag die Gesamtheit aller algebraischen Kurven und weit mehr einem systematischen Studium offen. In diesem neuen Bereiche entdeckte man die bis dahin unglaublichsten Singularitäten und fand ihn doch von harmonischen allgemeinen Gesetzen beherrscht. Und sogar diejenigen, welche heute die allgemeinen Gebilde der mengentheoretischen Untersuchungen aus der Geometrie zu verbannen suchen, haben in jener Epoche ihre Vorläufer. Denn nach der Entdeckung der analytischen Geometrie sagte man: „Die algebraischen Gebilde sind nun der Geometrie erschlossen, aber *was keiner algebraischen Gleichung genügt, das ist nicht geometrisch vollwertig, das gehört nicht in die Geometrie.*“

Nun, Sie alle wissen, es ist anders gekommen. Und so mehren sich denn auch die Zeichen dafür, dass die neue Erweiterung, Cantor's mengentheoretische Erweiterung, nicht nur der Wissenschaft unverloren bleiben wird, sondern, statt als eine zur Geometrie beziehungslose Punktmengenlehre ihr Dasein zu fristen, als die organische Weiterbildung und Verallgemeinerung der *Geometrie* anerkannt werden wird, was ich seit einigen Jahren durch die Einführung der Bezeichnung *mengentheoretische Geometrie* zum Ausdruck zu bringen suche und wovon dieser Vortrag einige kleine Beispiele Ihnen vorführen sollte.

Sein Ziel wäre erreicht, wenn es mir gelungen sein sollte, einem oder dem anderen Fernerstehenden eine der angeschnittenen Fragen dieses Gebietes näher zu bringen. Wenn er sich dann in diese neue Gedankenrichtung der Geometrie, fast möchte ich sagen, in diese neue geometrische Gedankenwelt vertieft, wird er auch erkennen, dass ein kurzer Überblick über diesen Gegenstand notwendig mit Unvollkommenheiten behaftet ist, und er wird dann vielleicht auch die Unvollkommenheiten dieses kurzen Berichtes entschuldigen.

Anschauung und Denken in der klassischen Theorie der griechischen Mathematik

Von J. Stenzel, Kiel

Hermann Weyl schliesst seine Philosophie der Mathemathik (Handbuch der Philosophie II A 161) mit dem ausdrücklichen Bekenntnis, dass seine Zeit und Liebe doch vor allem der mathematischen Forschung gehöre. Die grossen Mathematiker der klassischen griechischen Periode haben kaum anders gedacht, und sie haben die philosophische Theorie der Mathematik sicher nicht für ihre eigentliche Aufgabe gehalten. Zudem sind uns auch die praktischen Leistungen der Forscher, die als die klassischen bezeichnet werden müssen, wie Theodoros, Theaitetos und Eudoxos, nur ganz lückenhaft bekannt. Was Euklid um 300 gesammelt und geordnet hat, geht auf diese Vorgänger zurück; in welcher Form, in welcher theoretischen Haltung sie selbst ihre Ergebnisse ausgesprochen haben, ist nur durch vorsichtige Rückschlüsse aus dem bei Euklid vorliegenden System zu bestimmen. Hierbei spielen die Betrachtungen der klassischen Philosophen eine wichtige Rolle. Sie ermöglichen oft sicherer als die ausdrücklichen Zurückdatierungen und Zurückführungen späterer Zeugen bei geduldiger Einzelforschung ganze Sachgebiete, wie die Proportionenlehre, tatsächlich als die Leistung eines Eudoxos anzusehen.

Die klassischen Philosophen, die uns die älteste Theorie der Mathematik zugänglich machen, Plato und Aristoteles, sind hinsichtlich ihres guten Willens und ihrer Fähigkeit, über mathematische Dinge vollgültige Zeugen zu sein, verschieden beurteilt worden. Man hat dem ersteren eine aktive produktive Rolle bei der Herausbildung der exakten mathematischen Methodik zugeschrieben, wogegen der Instinkt der Mathematiker zu rebellieren pflegt; man hat umgekehrt dem Aristoteles sogar das Verständnis für das Wesen des Mathematischen abgesprochen, was dem modernen Mathematiker eher einleuchtet. Die Forschung hierüber ist im Fluss, und deshalb vermeidet man heute extreme Thesen. Nur das eine stellt sich immer mehr heraus: für beide Philosophen ist die Mathematik viel wichtiger, als man bisher annahm; in beider Lehre ist eine viel innigere Durchdringung aller philosophischen Disziplinen, der Metaphysik, Erkenntnislehre und Logik mit mathematischer Theorie, als man je in neuerer Zeit geglaubt hat. Mathematik ist noch weithin für sie Mathesis universalis oder liefert wenigstens die Methoden und Prinzipien, aus denen sich eine Mathesis universalis entwickelt. Bei dieser ausgebreiteten Verflechtung der philosophischen und mathematischen Theorien beider Philosophen muss im folgenden von Dingen gesprochen werden, die für den modernen Mathematiker nichts mit

Mathematik zu tun haben. Aber die Anwendungsmöglichkeit der Mathematik ist nun einmal ihr eigenes Grundproblem, und das Streben nach möglichster logischer Reinheit erwächst geschichtlich erst aus der ursprünglich noch ungeklärten Synthesis von Mathematik und Wirklichkeitswissenschaft überhaupt. Unser Thema: „Anschauung und Denken“ soll die Geschichte dieser Synthesis an dem Punkte zeigen, wo das Bedürfnis nach einer logischen Begründung der Mathematik theoriebildend geworden ist.

I.

Der erste Dialog Platons, in dem die Mathematik eine führende Rolle spielt, ist der Menon; jeder Mathematiker weiss, dass in ihm die Verdoppelung einer Quadratfläche vorgeführt wird als ein Beispiel der mäeutischen Fragekunst und zugleich als Beweis für den metaphysischen Satz: alles Wissen ist Wiedererinnerung. Aber zwei weniger bekannte Stellen im ersten und letzten Teile des Dialoges geben der mittleren erst ihre eigentliche Bedeutung.

An der ersten Stelle, Menon 74 d 11, wird wie so oft in den platonischen Dialogen an einem mathematischen Beispiel die strenge Definition eines allgemeinen Begriffes eingeübt. Um die Tugend, die allgemeine Tüchtigkeit und Leistungskraft wirklich ganz allgemein definieren und alle überflüssigen Einschränkungen des Begriffes vermeiden zu lernen, soll das *σχῆμα*, die Oberfläche, so definiert werden, dass z. B. die Gegensätze: Gekrümmtheit (*στρογγυλότης*), ebenflächige Begrenzung (*εὐθύ*) 74 d 7 und alle anderen Schemata mit umfasst werden.

Die erste Definition lautet: „*σχῆμα* heisse, was allein von allem Seienden immer der Farbe folgt (mit Farbe gegeben ist)“; diese erste Definition, die lediglich die flächige Ausbreitung trifft, ist aus mancherlei Gründen mathematisch unzulänglich; sie gibt, in der Sprache der späteren aristotelischen Logik ausgedrückt, lediglich ein *ἴδιον*, eine Eigenheit des Schemas an, aber nicht diejenige, die *σχῆμα* in den Zusammenhang mathematischer Begriffe einordnet. Diese Definition wird infolgedessen mit der Begründung zurückgewiesen, dass Farbe erst definiert werden müsse[1]). Die nächste Definition muss also Vorsorge treffen, dass keine undefinierten Bestimmungen verwendet werden. Sokrates versichert sich zunächst des Begriffes der Begrenzung, *πέρας*; um ihm die beabsichtigte Allgemeinheit und zugleich die nötige Bestimmtheit zu geben, stellt er neben *πέρας* die griechischen Worte *τελευτή*, Ende, und *ἔσχατον*, Äusserstes; die zugehörigen Verben werden zur Verdeutlichung herangezogen: begrenzt sein, mit etwas aufhören; und damit ist der Begriff *πέρας*

[1]) Diese Definition ist im Kern pythagoreisch. Aristoteles *περὶ αἰσθήσεως καὶ αἰσθητῶν*, 439 a 30. *τὸ γὰρ χρῶμα ἢ ἐν τῷ πέρατί ἐστιν ἢ πέρας. διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι τὴν ἐπιφάνειαν χροιὰν ἐκάλουν* (vgl. Metaphysik Z 4 die *ἐπιφάνεια λευκή*). Im Folgenden (Menon p. 76 d) wird mit Hilfe des inzwischen festgestellten Begriffs *σχῆμα* der Begriff Farbe auf Grund einer physikalischen Emissionstheorie definiert und damit ein allgemeiner Definitionstypus für die Sinnesempfindungen aufgestellt (76 d 8), ein weiterer Beweis dafür, dass die kunstgerechte Definition hier das ausdrückliche Thema ist.

bestimmt. Während hier durch diese drei Worte eine identische Bedeutungseinheit erfasst und für die Definition bereitgestellt werden soll, wird ein neues Bestimmungsstück aus einem Gegensatz gewonnen. Sokrates fragt: „Du nennst doch etwas eben und etwas anderes körperlich (*στερεόν*), so wie diese Begriffe in den Geometrien (also der ebenen und körperlichen) gebraucht werden?“ (76 a 1). Als Sokrates dies zugestanden wird, definiert er: „Oberfläche ist das, worin ein Körperliches endet, *σχῆμα πέρας στερεοῦ*.“ Hier ist jedes Wort aus klarster Überlegung der Erfordernisse einer Definition gewählt. Der euklidische Terminus *πέρας* ist damit in die mittelplatonische Zeit allermindestens zurückdatiert[2]).

Noch ein Wort über den bei Euklid und im Menon identischen Typus des Definierens. Bei Aristoteles lesen wir in einer frühen, der Akademie noch nahestehenden Schrift, der Topik Z 4 141 b 27, die vollständige Reihe dieser Definitionen: der Punkt ist die Grenze der Linie, die Linie die der Fläche, die Ebene die des Körpers (*στιγμὴ πέρας γραμμῆς, γραμμὴ πέρας ἐπιπέδου, ἐπίπεδον πέρας στερεοῦ*), wobei *ἐπίπεδον* auffällig ist. Nach Aristoteles wird hier das dem Durchschnittsmenschen Bekanntere, der sinnfällige Körper vorausgesetzt, aber das schlechthin Bekanntere und logisch Frühere sollte doch zur Definition für das Abgeleitete benutzt werden; das logisch Einfachere als die Linie sei doch zweifellos der Punkt usw., *wie ja auch die Einheit früher ist als die Zahl* (Top. 141 b 7 ff). Euklid beginnt nun tatsächlich im ersten Buch mit einem anderen Typus der Definition, den Aristoteles in der Topik ebenfalls bereits kennt (Z 6 143b 11ff), und der jenem Einwand nicht in demselben Masse ausgesetzt ist: 1. Punkt ist, was keine Teile hat. 2. Linie ist Länge ohne Breite. 3. Fläche ist, was nur Länge und Breite hat; offenbar eine positive Wendung für „was keine Tiefe hat“; denn im elften Buch wird Körper definiert als das, was Länge, Breite und Tiefe hat. Dazwischen gesetzt sind nun die *πέρας*-Definitionen, die umgekehrt die Beziehung zwischen bereits definierten Termen durch den neuen des *πέρας* darstellen; hinter 1 und 2 steht als dritte die Definition: der Linie Grenzen sind Punkte, so dass nun *πέρας* zum definiendum wird. Wahrscheinlich vereinigt Euklid auch hier die Ergebnisse verschiedener Diskussionen innerhalb der Akademie. Ihm kommt es auf den impliziten Zusammenhang der Termini mehr an als auf die *πρῶτα*, die wirklich ersten Prinzipien, aus denen man das folgende ableiten kann. Hierauf aber grade ging in erster Linie die Absicht Platos, wie wir noch sehen werden. Die Monas, die Einheit, als Prinzip der Zahl erwähnt Aristoteles als das Prototyp des echten *πρῶτον* an der bereits zitierten Stelle; die atomistische Punktdefinition Euklids verrät noch den Einfluss platonischer Theorien.

[2]) Im einzelnen weicht Euklid ab; *σχῆμα* (I. def. 14) wird definiert: *τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον* (vorher *ὅρος* als *πέρας τινός*). *στερεοῦ πέρας* ist bei ihm *ἐπιφάνεια* – ein Wort, das Platon nicht gebraucht. Es ist möglich, dass Platon im Menon mit Absicht auch gegen den Sprachgebrauch die Termini durch einander bestimmt, etwa *στρογγύλον* und *εὐθύ* als *ἐναντία* als gleichartig festsetzt, obwohl das erstere zunächst für zweidimensionale, *εὐθύ* für eindimensionale Gebilde gebraucht wird.

Wir haben uns bei diesem Beispiel länger aufgehalten, grade weil es weniger bekannt ist und seine problemgeschichtlichen Hintergründe nicht zutage liegen. Dass hinter Platos mathematischen Stellen oft viel mehr steht als der erste Blick verrät, wird sofort die zweite berühmte Stelle lehren. Wir gehen zu ihr über, indem wir die von Aristoteles aufgeworfene Frage nach dem Verhältnis gewisser mathematischer Definitionen zur sinnlichen Anschauung festhalten.

Wir können den szenischen Apparat dieser berühmten Stelle hier beiseite lassen. Es handelt sich um die Verdoppelung einer Quadratfläche von zwei Fuss Seitenlänge. Ein notorischer Laie findet nach zwei verunglückten Versuchen unter Sokrates mäeutischer Leitung, dass nicht das Quadrat über der vier Fuss langen Seite, auch nicht das über der drei Fuss langen, sondern das über der Diagonale errichtete Quadrat den doppelten Flächeninhalt hat. Der metaphysische pädagogische Glanz, in dem Platon diesen Akt der Wiedererinnerung leuchten lässt, darf darüber nicht hinwegtäuschen, dass die Aufgabe, so wie sie gestellt ist, ein jenem Laien verborgenes schwierigeres Problem sichtbar machen soll: die Inkommensurabilität der Seite und Diagonale des Quadrates. War doch so gefragt worden: wie gross ist die Seite, die zwischen der gegebenen von zwei Fuss und der als zu gross erkannten von drei Fuss liegt? *Zahlen* werden angegeben, nach einer *Zahl* wird gefragt! Was selbst der Laie geometrisch konstruierend so leicht findet, das bietet dem Mathematiker, der den Logos zwischen Seite und Diagonale arithmetisch bestimmen will, eine unüberwindliche Schwierigkeit. Dass Platon dauernd dieses Problem im Auge hat, beweist eine terminologische Finesse, die Otto Toeplitz entdeckt hat; immer nämlich, wo es sich um die Grösse dieser Seite handelt, wird nicht nach der *ποσότης*, sondern nach der *πηλικότης* gefragt; also schon damals bestand der mathematische Sprachgebrauch, die kommensurablen und inkommensurablen Grössenverhältnisse mit dem umfassenderen Ausdruck *πηλικότης* zu bezeichnen und die *ποσότης* den in ganzen Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen vorzubehalten. So beschreibt Euklid V 3 den Logos, das Verhältnis zweier Grössen *λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις*[3]). So ist diese Stelle unter zwei Gesichtspunkten zu betrachten. Einmal ist die geometrische Figur das schönste Beispiel für das platonische Eidos überhaupt; ein Anschauliches weist über sich hinaus auf einen in ihm symbolisierten begrifflichen Sachverhalt; andrerseits zeigt es das geschichtlich so wichtige Ineinandergreifen und doch wieder Auseinanderstreben geometrischer und arithmetischer Methode. Hier liegt, wie O. Neugebauer[4]) aus bester Kenntnis vorgriechischer und griechischer Mathematik es ausgesprochen hat, die entscheidende Wendung der spezifisch griechischen Entwicklung. Die vorgriechische Mathematik

[3]) Dazu das Scholion, bes. V. 286, 8 Heiberg.

[4]) Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, 1926, 17. Quellen und Studien I. 302. Problemkreise d. Math. i. hist. Entw. (Verh. d. Phys.-med. Ges. Würzburg, 1927, 60 ff.)

war vorwiegend arithmetisch-algebraisch und insbesondere die ägyptische vorwiegend additiv. Geometrie war zunächst „nur eines unter vielen Anwendungsgebieten einer selbständig entwickelten Rechentechnik“[5]). Demgegenüber ist es „eine der einschneidendsten Entdeckungen . . ., dass man erkannte, dass auch in geometrischen Konstruktionen *arithmetische* Beziehungen zum Ausdruck kommen. Damit verliert die Geometrie den Charakter, ein beliebiges praktisches Anwendungsgebiet der Mathematik zu sein, und erhält die prinzipielle Bedeutung, *allgemeine* mathematische Gesetzlichkeit zum Ausdruck bringen zu können: die geometrische Konstruktion spielt von da an die Rolle der „Formel“[6]). Da eine Figur nicht mehr ein Gegenstand der empirischen Aussenwelt ist, sondern ein „ideales Element der Mathematik“[7]), so ist jetzt „die Möglichkeit des Beweises allgemeiner Sätze gegeben; erst an der geometrischen Gestalt entwickelt sich die Einsicht in die Hierarchie der Lehrsätze und Schlüsse“[8]). Dies ist der Sinn der „Erinnerung“ im Menon; sie bedeutet wirkliche „Einsicht in den Grund“, *λογισμὸς αἰτίας*, Menon 98a; die empirisch erprobte Regel, das „anzuwendende Rezept“[9]) entwickelt sich zum beweisbaren, sicheren – Platon sagt: festgebundenen – festgestellten Satze. So stark Platon durch die metaphysische Begründung der mathematischen Erkenntnis die überempirische, also logische Geltung des *an* der anschaulichen Figur erkannten Satzes unterstreicht, so viel bleibt ihm im engeren methodischen Bereiche der Mathematik darüber noch zu sagen übrig; er holt es im VI. Buche der Politeia nach. Hier im Menon deutet das dritte mathematische Beispiel an, wie weit die mathematische Methode dieser Zeit über das Fassungsvermögen des laienhaften Burschen hinausgewachsen war. Im engsten Zusammenhang mit dem Thema des Dialoges – der Lehrbarkeit der Bildung, der Areté – berichtet Platon von der hypothetischen Analysis in der Mathematik und exemplifiziert sie an einer Maximumaufgabe, deren genaue Wortinterpretation lange ganz rätselhaft war, in der aber Heath in seinem Manual of Greek Mathematics, Oxford 1931, offenbar ein Stück weitergekommen ist, ohne freilich eine genaue Wortübersetzung des möglicherweise verderbten Textes zu geben. Der methodische Sinn des Beispieles ist klar: die Frage, ob es möglich ist, einen gegebenen Flächeninhalt als Dreieck in einen gegebenen Kreis einzuzeichnen, wird durch die Hypothese in Angriff genommen: wenn es möglich ist, in einer bestimmten Weise den Flächenraum jenes Dreiecks als Rechteck an den Durchmesser anzulegen, so ist die Aufgabe lösbar; sie führt auf den Schnitt des gegebenen Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel. Wie weit Platon zur Zeit, als er den Menon schrieb, wusste, dass das hypothetische Verfahren auch bei der Bewältigung der Aporie von $\sqrt{2}$ eine Rolle spielte, bleibe dahingestellt.

[5]) *Neugebauer*, Quellen und Studien. 302.
[6]) *Neugebauer*, Problemkreise 61. [7]) ibid. [8]) ibid.
[9]) *Neugebauer*, l. c.

II.

Der Terminus der Hypothesis, offenbar der Mathematik unmittelbar entlehnt, bleibt nun ein Grundbegriff der platonisch-aristotelischen Logik; mit ihm kommt das antike Denken der freien Voraussetzung und der logischen Analysis des durch sie implizierten Zusammenhanges am nächsten. Wie Platon die Hypothesis zunächst im Bereich des Mathematischen gefasst hat, zeigt die ausführlichste und wichtigste Grundlagenerörterung im VI. Buche der Politeia. Am Höhepunkte dieses ganzen Werkes, bei der Schilderung der Idee des Guten, die mit überschwänglichen Worten als der Mittelpunkt alles Seins und aller Erkenntnis entwickelt wird, schildert Platon die Hierarchie aller Seinsbereiche durch eine streng durchgeführte mathematische Analogie, eine Proportion: Nimm eine Linie, teile sie in ungleiche Teile und teile jeden der beiden Teile wieder in demselben Verhältnis. So wie diese Teile sich zu einander verhalten, so verhalten sich hinsichtlich der Deutlichkeit und damit der wissenschaftlichen Erfassbarkeit die Bereiche der Erkenntnisgegenstände, die auf jenes Proportionssystem abgebildet werden. Und zwar entspricht dem einen der beiden Hauptteile das sichtbar Anschauliche (*τὰ φαινόμενα*) bzw. die Meinung (Doxa), dem andern das Intelligible (*τὰ νοούμενα*) bzw. der Geist (*νοῦς*); der erste Bereich wird in den untersten der „Abbilder", der Schatten und Spiegelbilder, und den nächsthöheren der in dieser untersten Stufe abgebildeten Gegenstände geteilt; die entsprechenden Erkenntnisvorgänge heissen Abbildungskraft, *εἰκασία*, und *πίστις*, Glaube, also schlichte Hinnahme des Gegebenen. Die beiden entsprechenden Abschnitte des intelligiblen Teiles werden erst allmählich ausgefüllt. Es wird zunächst die strenge Entsprechung des ganzen intelligiblen und des anschaulichen Abschnittes betont; der nächste Schritt führt uns bereits zu den „mathematischen" Gegenständen; sie werden als *ὑποθέσεις* und als Ideen und als Bereich der dritten Stufe bezeichnet, sofern anschauliche Figuren und Modelle benutzt werden. Insofern diese mathematischen Gegenstände jedoch nach dem Prinzip (*ἀρχή*) hin orientiert sind und auf die Hilfe der anschaulichen Figuren und Modelle verzichtet wird, also nur durch die Ideen, *εἴδη*, selbst der Gang des Beweisens, die Methodos erfolgt, tritt die höchste Stufe in Funktion (510 b, 4 ff).

Jeder, der diese noch unbestimmten Angaben hört, wird unwillkürlich versuchen, die Beziehungen der einzelnen Stufen zueinander, die Proportion der Bereiche, zur Klärung jeder einzelnen Stufe zu benutzen; d. h. er wird genau im Sinne Platons die durch den Zusammenhang implizierte Bedeutung der einzelnen Terme zu erfassen suchen. Wir wollen uns für später merken, dass das Werkzeug dieser relationsmässigen Bestimmung die Proportion, und zwar die Verbindung von Logoi, Verhältnissen, zur Verhältnisgleichheit, Analogia, ist. Plato erklärt sich bei weitem am ausführlichsten über den dritten, den mathematischen Bereich; von ihm aus erwartet er also die Aufhellung der anderen Bereiche, vor allem die des höchsten.

Das, was hierbei herausspringen muss, ist eine Differenzierung der anschaulichen und gedanklichen Evidenzmöglichkeiten.

Plato lässt seinen Sokrates folgendes entwickeln: Diejenigen, die sich mit den Geometrien – wieder der Plural wie im Menon – mit der Rechenlehre und derartigem beschäftigen, machen gewisse Voraussetzungen, „Hypothesen“: das Grade und Ungrade, die verschiedenen Figuren, *σχήματα* (hier wohl allgemeiner als im Menon gebraucht), die drei Arten von Winkeln und anderes derartiges gemäss jeder einzelnen Methodos. Hierüber Rechenschaft zu geben, halten sie nicht für nötig (*ἀξιοῦσιν*; es ist das Wort, von dem „Axiom“ abgeleitet ist), sondern hiervon ausgehend kommen sie folgerichtig (*ὁμολογουμένως*; eigentlich „mit sich übereinstimmend“, also widerspruchsfrei) zum Ergebnis ihrer jeweiligen einzelnen Untersuchung. Hierbei gebrauchen sie nebenbei (*προσχρῶνται*) die gesehenen Gestalten und sprechen von ihnen, meinen aber nie die einzelne Figur, sondern die „Diagonale selbst“, das Viereck selbst usw. Das heisst, sie betrachten ihre Modelle, von denen es wieder Spiegelbilder, Schattenrisse, Projektionen, als Abbilder (unterste Stufe!) gibt, selbst als Abbildungen, Nachahmungen einer höheren ideellen Wirklichkeit, der die eigentliche mathematische Erkenntnis, die *διάνοια*, zugewandt ist. Aus dieser Schilderung ergibt sich klar, was mit den Hypotheseis hier im Staate gemeint ist. Es sind die einzelnen *ὅροι*, Sätze, die etwa aussagen: es gibt drei Arten von Winkeln, $\gtreqqless$ als 90 Grad; jede Zahl ist entweder grade oder ungrade. Dabei ist auf die unmittelbare „anschauliche“ Einsichtigkeit dieser Aussagen gebaut; sie stehen nebeneinander, wie die „Figuren“ des Dreiecks, des Vierecks und die in ihnen beschlossenen Aussagen. Die Quadratanordnung des Menon: 16 Quadrate, symmetrisch angeordnet, die Diagonale in einem der vier Fuss grossen Quadrate passend gezogen, *ist* ein Satz, eine Formel genau so wie das Dreieck, durch dessen Spitze eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite gezogen ist, den Satz der Winkelsumme darstellt, wie die Gnomonfigur sofort zeigt: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ und mit geringer Modifikation $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$. Die Schwierigkeit, Bestimmungen wie die ersten über Zahlen und Winkel, *ὅροι*, und die in Figuren symbolisierten Formeln und Sätze unter einen Hut zu bringen, hat die Ausleger unserer Stelle viel beschäftigt. Sie beleuchtet aber grade die Situation, die Plato vorfand und die er oder die Mathematiker seiner Akademie aufzuheben trachteten. Das *Nebeneinander* von mathematischen *ὅροι* und Aussagen soll ja gerade übergeführt werden in eine Hierarchie, in der Oberes, Allgemeines voransteht, und Besonderes aus ihm abgeleitet wird. Auf eine Vereinheitlichung und Gruppierung der einzelnen Hypotheseis, die eine Sonderung der verschiedenen Typen notwendig mit sich bringt, läuft nun zweifellos alles hinaus, was Plato über die vierte Stufe sagt. Plato verlangt, diese einzelnen Hypotheseis wirklich zu Hypo-Theseis, Unterstellungen zu machen, zum Auslauf, zur Operationsbasis, zur Etappe (*ἐπίβασις* und *ὁρμή*) auf dem Marsch zur *Einheit des Ganzen,* der ἀρχὴ τοῦ παντός, dem ἀνυπόθετον. Von dieser Einheit aus kann rückläufig, ohne sich des Anschaulichen zu bedienen, der Logos selbst alle die früheren Stufen einsichtig, intelligibel machen. Es kommt also gar nicht darauf an, ob sich die Aussagen auf Anschauliches beziehen, sondern nur auf den logischen Zusammenhang der Aussagen und deren Abhängigkeit von Prinzipien. Das ist unzweideutig das Programm der Axiomatisierung, wie es bei Aristoteles in den zweiten Analytiken mit deutlicher Beziehung auf die Mathematik[10]) breiter entwickelt und von Euklid praktisch ausgeführt ist. Plato konnte hier nicht deutlicher sein; er will doch die mathematische Prinzipienlehre zugleich als allgemeine Mathesis, als umfassende Ideenlehre darstellen, die für die mathematischen Gegenstände abgestuften Seins- und Erkenntnisweisen analog für alles Wirkliche durchführen und mit der Dialektik des Sokrates in Beziehung halten. Deshalb müssen die Ausführungen über die mathematische Erziehung aus dem folgenden Buche der Politeia zur Ergänzung dienen. Gerade im Hinblick auf den Axiomatisierungsgedanken der Hypotheseis gewinnt der Vorrang der Lehre von den reinen ganzen Zahlen (VII 524a, 525d e) im Aufbau der Wissenschaftslehre eine besondere Bedeutung. Das Ziel, jedenfalls die Endstellung der rastlos von Plato durch- und umgedachten Prinzipienlehre, zugleich die kühnste Auseinandersetzung von Anschauung und Denken überhaupt, ist die Überbietung des damaligen mathematischen Zahlbegriffs durch einen neuen, durch die Gleichsetzung von Zahlen und Ideen, die Lehre von den Ideenzahlen, und diese Lehre bezeichnet zugleich den Abschluss, den unsere Erörterungen zu erreichen suchen.

III.

Die Idealzahlen haben das Interesse produktiver Mathematiker, wie Georg Cantors, gefunden[11]), weniger bisher das der Historiker der Mathematik. Moritz Cantor sagt nichts darüber, und das ist begreiflich; denn damals stand die quellenmässige Erforschung noch im ersten Anfange. Höchst wesentlich war für dieses Gebiet der Anstoss, den Otto Toeplitz' These gegeben hat: die Idealzahlen haben etwas mit dem Logos, dem mathematischen Verhältnis zu tun[12]).

Die für die Mathematik so folgenreiche allgemeine Verhältnislehre des Eudoxos hat die gesamte akademische Philosophie beeinflusst. Die Ähnlichkeit, die Nachahmung (μίμησις) eines Vorbildes (παράδειγμα), die Abbildbarkeit und Zuordnung verschiedener Seinsbereiche aufeinander war an jener Stelle der Politeia der Sinn des vierteiligen Schemas, das durch die geteilte Strecke die gesamte Synthesis, die von der höchsten Idee ausgehen soll, unter das Gesetz des Logos in jenem Doppel-

[10]) Vgl. *Fr. Solmsen,* Die Entw. d. Arist. Logik u. Rhetorik. Berlin 1929. *H. Scholz,* Die Axiomatik der Alten. Blätter für deutsche Philos. Berlin 1930.

[11]) Zeitschrift f. Philos. u. philos. Krit. N. F. 88 (1886), 227.

[12]) Quellen und Studien. I. 1.

sinne als Verhältnis und als ratio stellt, mit dem Plato von nun an ununterbrochen operiert, bis in scharfsinnige, nur dem Mathematiker verständliche Wortspiele hinein[13]). Die Proportion, die Verbindung gleicher und ungleicher Logoi, hat nicht nur für die exaktmathematische Frage, wie ganzzahlig Unvergleichbares, Inkommensurables doch aneinander gemessen werden kann, sondern darüber hinaus für die begriffliche Bestimmung möglicher Verschiedenheiten und Ähnlichkeiten eine schlechthin unbeschränkte Bedeutung. Schon in der Akademie müssen gewisse Sätze der Proportionenlehre allgemein, ohne jede Rücksicht auf die Art der verglichenen Gegenstände gesucht und gefunden worden sein[14]). Die Unabhängigkeit der Beziehung von den fundierenden Elementen bedeutet zugleich ihre – wie man in der Akademie geglaubt hat – schrankenlose Anwendbarkeit; der Zwiespalt der Anschauung und des Denkens schien durch diesen Logos endgültig geschlichtet. Man hat immer geglaubt, dass dem antiken Denken der Begriff der „Relation" gefehlt hätte und dass dieser für die moderne Logik und Erkenntnistheorie charakteristisch sei. Diese These ist nicht mehr zu halten. Im Logos und in der Verbindung der Logoi ist der Relationsbegriff auch für die antike Logik nachgewiesen; ja er hilft gerade, auf die Hauptfrage der antiken Logik, die der Definition, eine neue Antwort finden.

Wie bereits gesagt, ist die Verbindung der Logoi das einfachste und wichtigste Beispiel, wie mehrere, mindestens drei, Terme, gleichviel welcher Art, ihre eigene Bestimmtheit lediglich durch ihren Zusammenhang kraft jener Beziehung erhalten; daher wird die Logoslehre der wichtigste Anstoss und Leitfaden für das freie implizite Definieren. Plato wagt es, am Ende seines der Sprache, also dem Zeichen- und Ausdrucksproblem, gewidmeten Dialoges die Erkenntnis auf die unabhängig von den jeweiligen Worten bestehenden gegenseitigen Beziehungen der Wirklichkeiten zu gründen (von Otto Toeplitz zuerst in diesen Zusammenhang gestellt). Platos Nachfolger, Speusipp, hat versucht, die begrifflichen Beziehungen als „Ähnlichkeiten" (*ὅμοια*) in ein systematisches Ganzes zusammenzufassen und hat in kühner Vorwegnahme Leibnizischer Gedanken die durchgängige, gegenseitige Bedingtheit aller Wirklichkeiten behauptet, so dass jeder Begriff nur implizit durch seine Beziehung zu allen andern streng definiert werden könnte. Dieser Systembegriff nimmt die Form einer Ideenpyramide an, mit einer Spitze, dem einheitlichen Sein, das immer weiter eingeteilt wird, bis man zu unteilbaren ideellen Einheiten gelangt (Diairesis)[15]). Die Übersteigerung des Relationsbegriffes lässt den gegenläufigen Gedanken einer für die Begriffsbestimmung notwendigen *Reduktion* der Prinzipien auf dem engeren mathematischen Felde desto kräftiger sich entwickeln. Durch diesen Gedan-

[13]) Staat VII 534 a *πολλαπλάσιος λόγος*. 534 d *ἄλογοι γραμμαί*.

[14]) An. post. I, 5, 74 a, 18 ff, 85 b 1 ff. Über die Wichtigkeit des hier hervorgehobenen *ἐναλλάξ*-Problems (Vertauschung der inneren Glieder) vgl. *Stenzel*, Zahl und Gestalt, zweite Aufl. Index.

[15]) *Stenzel*, Studien S. 60. Zahl u. Gestalt S. 18.

ken wird die durchgängige Bestimmtheit der Terme eines definiten und dadurch definierten Systems erst wissenschaftlich fruchtbar. Eben dieser Gedanke liegt der Gleichsetzung von Idee und Zahl zugrunde. Plato hat diese Reduktion der Bestimmungsstücke sich als deren zahlenmässige Begrenzung vorgestellt. Wenn jede höhere Klasse von Gegenständen: Figuren, Lauten, musikalischen Intervallen, Körpern usw., sich in eine endliche Anzahl von Unterklassen einteilen lässt, diese wieder weiter bis zum ideellen Atomon, so sind die diesem zugeordneten konkreten Individuen, der konkrete Laut, das tönende Intervall usw., hinlänglich definiert, sobald die ideelle Einheit, der Laut a, das Intervall Quart, durch eine Mindestzahl notwendiger Bestimmungen eindeutig charakterisiert ist. Weder die zufälligen Eigenschaften des konkreten einzelnen Individuums, noch die Eigentümlichkeiten, die allen zukommen, werden in den Wesensbegriff aufgenommen, wenn sie zur eindeutigen Unterscheidbarkeit von andersartigen Individuen nicht notwendig sind. Alle diese möglichen Aussagen über individuelles Eidos und konkretes Individuum werden in das Peras, die begrenzte Wesenheit, als für die Frage nach dem „was es ist", *τί ἐστιν*, überflüssig, nicht mit aufgenommen und ins Apeiron, ins Unbestimmte, weil nur durch unendlich viele Aussagen Erfassbare entlassen (Philebos 16c). Dieser methodisch konstruktive Abbau der anschaulichen Fülle wird von Aristoteles in den zweiten Analytiken an mathematischen Beispielen eingeübt – Sätze über gleichseitige, gleichschenklige Dreiecke, schliesslich über das Dreieck schlechthin, Sätze über Proportionen zwischen Zahlen, Grössen und Zeiten, schliesslich allgemeine Proportionssätze; zuletzt schlechthin allgemeine logische Grundsätze, *κοινά*. Aber Aristoteles überträgt den hier nach Platos Angaben gewonnenen Wesensbegriff z. B. auf den Bereich naturwissenschaftlicher Klassen und kann so ganz streng den Inhalt wissenschaftlicher Aussagen über Gegenstände von dem in konkreter Anschauung gegebenen scheiden.

Während so weit Aristoteles mit Plato durchaus übereinstimmt, kann er ihm nicht folgen bis zu der Lehre von den höchsten Prinzipien, die an der Spitze der Ideenpyramide allen bestimmten Ideen vorausliegen und ihre Rangordnung bestimmen. Das *Eine* und die *unbestimmte Zweiheit* des Grossen und Kleinen sind diese Ideen, die zur Gleichsetzung eines höheren Zahlen- und Ideenbegriffs geführt haben. Diese Prinzipien sollen reine, von jeder, auch der reinsten Anschauung freie Denksetzungen sein. Das Eine soll so wenig wie die Zweiheit des Grossen und Kleinen bereits mathematisch Zahl sein; es sollen diese Prinzipien auch nicht als Punkt und Ausgedehntes Räumliches bezeichnen, es soll dies Eine überhaupt nicht als bereits zur Klasse begrifflich zusammengefasstes Peras neben der unbestimmten Mannigfaltigkeit des noch zu gliedernden Apeiron stehen, dessen „Anfang" die unbestimmte Zweiheit passend bezeichnen könnte. Aber diese drei Möglichkeiten sollen in diesen Prinzipien potentiell, *δυνάμει*, liegen, sie sollen das Minimum an denkbarer Bestimmtheit sein und deshalb wirkliche Anfänge (*ἀρχαί*), Prinzipien von definierter Unbestimmtheit (ἀοριστία), notwendige Bedingungen für alles Denken, selbst nicht aufgehoben beim Wegdenken jeder anderen Bestimmtheit, aber alles andere aufhebend, wenn man sie selbst wegdächte, das Modell einer einfachsten Beziehung von Form und Inhalt.

Aus der Verbindung dieser beiden Prinzipien lässt nun Plato zunächst die Zahlen entstehen. Die Ansichten von dem allgemeineren, über die natürlichen ganzen Zahlen hinausreichenden Zahlbegriff, haben sich in folgenden Stufen gebildet. In dem Buche „Zahl und Gestalt" bemühte ich mich, nach dem Vorgange von Léon Robin, den griechischen Zahlbegriff überhaupt mit den Ansichten des spätern Platon in neue Beziehung zu setzen, vor allem die geflissentliche Vermeidung der Brüche bei den Griechen – im Gegensatz zur ägyptischen Bruchrechnung – auszuwerten. Etwa im Sinne der Stelle des Staates VII 525d: Zahlen, die „Leiber" haben (benannte Zahlen), 1 Brot, 1 Bierration, natürlich auch ein Stück Acker usw., kann man teilen; dagegen nicht die Einheit, die reine Eins; wenn der Laie das tut, lachen die Mathematiker und antworten sofort mit einer Vervielfältigung, die die Teilung aufhebt. Das Ergebnis ist dann ein Logos, ein Verhältnis.

O. Toeplitz hat sich diese neue Zahl zunächst als das Verhältnis, z. B. $1/2$, gedacht, das alle möglichen Einkleidungen bekommen kann: $4/2$, $6/3$, $8/4$; aber auch Strecken, Zeiten oder Flächen wie das Quadrat über der Diagonale und das Grundquadrat.

A. E. Taylor hat in einer Rezension meines Buches (Gnomon 1926) einen kühnen Schritt weiter getan. Er hat nicht das auf dem Umweg über die Geometrie fassbare Verhältnis der Diagonale und Seite – so Toeplitz – sondern die Ausrechnung für den Sinn und das Ziel der neuen Zahlbegriffe angesehen: die unbestimmte Zweiheit der Gross-Kleinen meint diejenigen Zahlenverhältnisse, die sich an das irrationale Verhältnis zweier inkommensurabler Grössen immer näher von zwei Seiten herandrängen, immer zu gross oder zu klein bleibend.

Auf Grund eines Aristoteles-Kapitels, Metaph. Δ 15, konnte ich (Quellen und Studien, I, 50) durch eine Kombination von Toeplitz und Taylor dessen These historisch genauer ausdrücken. Aristoteles spricht tatsächlich dort von einem ἀσύμμετρος ἀριθμός. Ross, der verdienstvolle Kommentator der Metaphysik, änderte 1923 noch diese Stelle. Auf Grund dieses Kapitels glaube ich: die unbestimmte Zweiheit des Grossen und Kleinen ist zunächst nur ein Überschiessendes und ein Zurückbleibendes, der unbestimmte Logos zweier Grössen, ἀόριστος λόγος bei Aristoteles, der noch nicht zahlenmässig festgelegt ist. In diesem Logos liegt die Keimzelle der ganzen Prinzipienlehre; mit ihm hat in der Tat Eudoxos die mathematischen Probleme des Inkommensurablen und des Kontinuums bewältigt. Wird der unbestimmte Logos bestimmt durch die Kraft des andern Prinzips, des Eins, also zu *diesem* bestimmten Logos, so wird die natürliche Zahl daraus, indem nun die Eins selber Zahleinheit wird und den Logos der Zweiheit misst: Eins spaltet sich auf in eine echte Zweiheit; dieses Verfahren hat Herm. Weyl[16]) an das dyadische Zahlensystem erinnert.

Die nächste Deduktion aus diesen Prinzipien betrifft die Geometrien. In der Akademie wurde die 2 als die Linie selbst bzw. als die Idee der Linie aufgefasst, die 3 als Fläche, die 4 als Körper. So wie der Mathematiker selbstverständlich von dem sinnlich-anschaulichen Stoff (Erz, Holz usw.) seiner Gegenstände abstrahiere, so müsse er nach dieser Theorie, sagt Aristoteles[17]), sogar vom Kontinuum abstrahieren; für die mathematische Bestimmung der Linie genüge die Zweiheit usw. Diese Zweiheit wäre also Idee, und zwar Idee der Linie; es gäbe also von einigem keine Ideen, weil es unmittelbar Idee wäre, z. B. die Zahlen. Diese so weitgehende Formalisierung der Begriffe ist, wie so vieles in der klassischen Theorie, entweder nur Ansatz geblieben oder die Auswirkungen in der Mathematik sind uns verloren gegangen.

Mit diesem respektablen Versuch, dem Denken auch die reine Raumanschauung unterzuordnen, soll die Betrachtung abgeschlossen sein. Die klassische Theorie hat mit grosser Kühnheit der Wirklichkeit, den Phänomenen, das lückenlose Gefüge des Denkens gegenübergestellt, und doch hat sie, soweit ich sehe, nie eine willkürliche Festsetzung von Axiomen angenommen. Die Bewegungen der Gestirne stellten die Aufgaben, die der Logos aus seiner eigenen Kraft zu lösen hatte; *τὰ φαινόμενα σῴζειν*, die Phänomene in einem Zusammenhang zu begreifen und sie so bewahrend zu halten im Strome des Werdens, war der Sinn jeder Theorie. Die Griechen hatten den guten Glauben, dass der menschliche Geist gerade dann, wenn er auf die freie Gesetzlichkeit des Logos hört, der Wirklichkeit am nächsten ist, und sie kleideten diesen Glauben, dass die Weltwirklichkeit wie eine grosse Figur den mathematischen Logos zur Anschauung bringt, in die schlichte Formel: *ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμετρεῖ.*

[16]) Handbuch der Philosophie, II A 50. Cf. auch *O. Becker*, Mathem. Existenz, 1927, 205, Anm. 1; Quellen und Studien, I 466.

[17]) Aristot. Met. Z. 11, 1036 b, 10. Cf. auch H 3, 1043 a 34.